0.1 הגדרה

נגדיר את $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$.

<u>משפט:</u> קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}x_n$, לגבול הזה קוראים e.

<u>הוכחה:</u> נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.

עולה מונוטונית:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}}=\frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}}=\frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}}=\frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)}=(1-\frac{1}{n^2})^n\frac{n}{n-1}$$

לפי אי שיוויון ברנולי, זה גדול או שווה לביטוי הבא:

$$(1+n(-\frac{1}{n^2}))\cdot\frac{n}{n-1}=\frac{(n-1)n}{n(n-1)}=1$$

מכאן שזוהי סדרה מונוטונית עולה.

חסומה מלעיל:

$$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$$

ואם נפתח את הביטוי לפי הבינום של ניוטון נקבל

$$x_n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^n}$$

איבר טיפוסי בסכום הזה הוא מהצורה

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k}\le\frac{n^n}{n^{n-k}k!}\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}$$

ולכן

$$x_n\le 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

כל מה שאחרי ה־2 זה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה 1 ולכן נקבל ש־ $x_n<3$
אז זוהי סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת.

0.2 תכונות של e

<u>משפט:</u> $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=e$ <u>הוכחה:</u>)ההוכחה משתמשת בכלים מסוף הקורס(ידוע ש־ $e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ ולכן אם נציב $x=0$ נקבל את הדרוש.

נשים לב שאם נגדיר $e_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ אז אם $N>n$ מתקיים

$$e_N-e_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots\frac{1}{N!}\le\frac{1}{(n+1)!}+(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{N-n-1}})=$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{\frac{1}{n+2}((\frac{1}{n+2})^{N-n}-1)}{\frac{1}{n+2}-1}\le\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$$

כעת נשתמש בזה בשביל להוכיח:

<u>משפט:</u> $e\notin\mathbb{Q}$

<u>הוכחה:</u>

נניח $e=\frac{p}{q}=1+\cdots+\frac{1}{n!}+\alpha_n$ ומכאן $|\alpha_n|<\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$ וע"י כפל של 2 האגפים נקבל

$$(n+1)!\frac{p}{q}=(n+1)!(1+\cdots+\frac{1}{n!})+(n+1)!\alpha_n$$

וזה נכון לכל n, בפרט ל־ $n>q$. במקרה זה, אגף שמאל שלם ואגף ימין מורכב ממשהו שהוא שלם ועוד $(n+1)!\alpha_n$ אבל החלק האחרון הזה הוא לא שלם משום שקטן מ־ $\frac{1}{n+1}$. אגף שמאל, שהוא שלם הוא סכום של משהו שלם ומשהו שהוא לא שלם. סתירה