0.1 פעולות עם גבולות אינסופיים

<u>משפט:</u>

1. אם $x_n \to \pm\infty, y_n \to a \in \mathbb{R}$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = \pm\infty$ (בהתאם לגבול של x_n)
2. אם $x_n \to \pm\infty, y_n \to a \in \mathbb{R}$ ו־ $a \neq 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \mathrm{sign}(a) \cdot \pm\infty$ כאשר הסימן של A מוגדר להיות 1 אם הוא חיובי, -1 אם הוא שלילי ו־0 אם הוא 0.
3. $\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. גם הצד השני נכון, נסו להוכיח את זה לפי המשפטונים הבאים:

3.1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \wedge x_n > 0 \Rightarrow x_n \to \infty$

3.2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \wedge x_n < 0 \Rightarrow x_n \to -\infty$

<u>הוכחה:</u>

1. יהי $M > 0$. מהגדרת הגבול של y_n ידוע ש־ $\exists_{n_1}\forall_{n>n_1} : a-1 < y_n < a+1$ ומהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש־ $\exists_{n_2}\forall_{n>n_2} : x_n > M-a+1$ ולכן אם נגדיר $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ אז יתקיים ש־ $\forall_{n>n_0} : x_n+y_n > (M-a+1)+(a-1) = M$.
2. נוכיח עבור a חיובי, עבור a שלילי ההוכחה דומה מאוד והדבר היחיד כמעט שמשתנה זה סימני אי השיוויון:

יהי $M > 0$. מהגדרת הגבול של y_n ידוע ש־ $\exists_{n_1}\forall_{n>n_1} : \frac{a}{2} < y_n < \frac{3a}{2}$ ומהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש־ $\exists_{n_2}\forall_{n>n_2} : x_n > \frac{2}{a}M$ ולכן אם נגדיר $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ אז יתקיים ש־ $\forall_{n>n_0} : x_n \cdot y_n > \frac{2}{a}M \cdot \frac{a}{2} = M$.

3. יהי $\epsilon > 0$. מהגדרת השאיפה לאינסוף של x_n אנחנו יודעים ש־ $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} : x_n > \frac{1}{\epsilon}$ אבל $\frac{1}{|x_n|} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < |x_n|$ וקיבלנו את הדרוש כי $\forall_{n>n_0} : |\frac{1}{x_n}| < \epsilon$

3.1. נוכיח את 3.1 ו־ 3.2 מוכח באופן דומה: יהי $M > 0$ אז $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M}$ ומכאן ש־ $\forall_{n>n_0} x_n > M$. משל

0.2 מקרים של כל מקרה לגופו ־ אי הגדרה:

יהיו x_n, y_n

1. אם $x_n \to \infty, y_n \to -\infty$ אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $x_n + y_n$ (במילים אחרות, לא מוגדר $\infty + (-\infty)$)
2. אם $x_n \to \infty, y_n \to 0$ אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $x_n \cdot y_n$ (במילים אחרות, לא מוגדר $0 \cdot \infty$)
3. אם שתי הסדרות שואפות ל־0 אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של $\frac{x_n}{y_n}$ (במילים אחרות, לא מוגדר $\frac{0}{0}$)

דוגמאות:

1. כל זוג סדרות פה הוא דוגמה למקרה 1 אבל בכל זוג הגבול של הסכום שונה (ולפעמים לא קיים):

$x_n = n, y_n = 1-n$

$x_n = n^2, y_n = 2-n^2$

$x_n = n^2, y_n = -n$

$x_n = n, y_n = -n^2$

$x_n = n, y_n = (-1)^n - n$

2. כל זוג סדרות פה הוא דוגמה למקרה 2 אבל בכל זוג הגבול של המכפלה שונה (ולפעמים לא קיים):

$x_n = n, y_n = \frac{1}{n}$

$x_n = n^2, y_n = \frac{2}{n^2}$

$x_n = n^2, y_n = \frac{-1}{n}$

$x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$

$x_n = n, y_n = \frac{(-1)^n}{n}$

3. אם ניקח כל זוג מהדוגמאות של מקרה 2 ונחליף את x_n בהופכי שלו, נקבל דוגמאות ל-3 (חשבו מה קורה במקרה זה ל-$\frac{y_n}{x_n}$)

<u>תרגיל:</u> מהו $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$?

<u>פתרון:</u> $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$.