הגדרה:
תהי A מטריצה ריבועית מגודל $n\times n$. $p_A(x)=\det(xI_n-A))$ נקרא <u>הפולינום האופייני</u> של המטריצה A.
חשוב לשים לב שזהו פולינום; האיברים במטריצה xI_n-A הם פולינומים לכל היותר ממעלה 1. דטרמיננטה היא, בסך הכל, סכום של מכפלות של איברים מתוך המטריצה. לכן, גם התוצאה היא פולינום.
תכונות:

1. השורשים של $p_A(x)$ הם הע"ע של A.
   הוכחה:
   לפי טענה שראינו בהרצאה הראשונה.
2. אם A מטריצה משולשית, $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \star\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ אזי $p_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$.
3. $p_A(x)$ הוא פולינום מתוקן. זאת אומרת, המקדם הראשי / המוביל שלו שווה ל־1.
4. $\deg(p_A(x))=n$.
5. אם $p_A(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, אזי $a_0=(-1)^n\cdot\det(A)$ וגם $a_{n-1}=-tr(A)$.

הוכחות לסעיפים 3, 4 ו־5:

$$p_A(x)=\det(xI_n-A)=\det\begin{pmatrix}x-a_{11} & \cdots & -a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}sgn(\sigma)\,c_{1\sigma(1)}\ldots c_{n\sigma(n)}=$$
$$x^n+x^{n-1}(-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{nn})+\cdots+a_0$$

מהפיתוח הנ"ל, סעיפים 3 ו־4 נובעים באופן מיידי. נותר להוכיח את סעיף 5:

$$a_0=p_A(0)=\det(0I_n-A)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$$