1 מרחבים עצמיים

הגדרה:
תהי A מטריצה ריבועית, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A. נגדיר $V_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{F}^n \mid Av = \lambda v\}$. $V_\lambda(A)$ נקרא המרחב העצמי של A הקשור ל־λ.
בעצם, זוהי קבוצת כל הווקטורים העצמיים של A הקשורים ל־λ, ביחד עם וקטור האפס.
הערה:
$V_\lambda(A)$ הוא תת־מרחב וקטורי של $V = \mathbb{F}^n$.
הוכחה:
$0 \in V_\lambda(A)$ ־ טריוויאלי, מכיוון ש־$A \cdot 0 = 0 = \lambda \cdot 0$.
כמו כן, אם $v_1, v_2 \in V_\lambda(A)$ ו־$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, מתקיים $A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$ ומכאן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda(A)$.
הגדרה:
נגדיר לכל ע"ע של אופרטור לינארי T, מרחב $V_\lambda(T) = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$. $V_\lambda(T)$ נקרא המרחב העצמי של T הקשור ל־λ.
כמו במטריצות, זהו אוסף הווקטורים העצמיים עם אפס, וגם זה מרחב וקטורי (הוכחה דומה).

2 לכסון אופרטורים

הגדרה:
יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש־T לכסין (ניתן ללכסון) אם קיים בסיס B של V כך שהמטריצה המייצגת A של T יחסית ל־B אלכסונית.
בעצם, כהרגלנו, המרנו את הבעיה של אופרטורים לבעיה של מטריצות. שיטה זו תחזור מספר פעמים בקורס, וכל טענה שנוכיח לאחד מהסוגים (מטריצות או אופרטורים) תהיה נכונה באופן אוטומטי גם לסוג השני, עקב השקילות ביניהם (מלינארית 1). דוגמה לכך היא הטענה הבאה:
משפט: קריטריון בסיסי ללכסון אופרטור
אופרטור $T: V \to V$ ניתן ללכסון אם ורק אם קיים בסיס B של V המורכב מו"ע של T.

3 הפולינום האופייני

הגדרה:
תהי A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$. $p_A(x) = \det(xI_n - A))$ נקרא הפולינום האופייני של המטריצה A.
חשוב לשים לב שזהו פולינום; האיברים במטריצה $xI_n - A$ הם פולינומים לכל היותר ממעלה 1.1. דטרמיננטה היא, בסך הכל, סכום של מכפלות של איברים מתוך המטריצה. לכן, גם התוצאה היא פולינום.
פולינום זה אמור להיות מוכר; כאשר דיברנו על ערכים עצמיים ועל וקטורים עצמיים, הוא היה חלק מהאלגוריתם למציאת ערכים עצמיים. אכן, התכונה הראשונה בטענה הבאה תזכיר זאת שוב:
תכונות:

1. השורשים של $p_A(x)$ הם הע"ע של A.

   הוכחה:

   לפי טענה שראינו בהרצאה הראשונה.

2. אם A מטריצה משולשית, $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \star\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ אזי $p_A\left(x\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(x-\lambda_i\right)$.

3. $p_A\left(x\right)$ הוא פולינום מתוקן. זאת אומרת, המקדם הראשי / המוביל שלו שווה ל־1.

4. $\deg\left(p_A\left(x\right)\right)=n$.

5. אם $p_A\left(x\right)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, אזי $a_0=\left(-1\right)^n\cdot\det\left(A\right)$ וגם $a_{n-1}=-tr\left(A\right)$.

הוכחות לסעיפים 3, 4 ו־5:

$$p_A\left(x\right)=\det\left(xI_n-A\right)=\det\begin{pmatrix}x-a_{11} & \cdots & -a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn}\end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in S_n}sgn\left(\sigma\right)c_{1\sigma(1)}\dots c_{n\sigma(n)}=$$
$$x^n+x^{n-1}\left(-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{nn}\right)+\cdots+a_0$$

מהפיתוח הנ"ל, סעיפים 3 ו־4 נובעים באופן מיידי. נותר להוכיח את סעיף 5:

$$a_0=p_A\left(0\right)=\det\left(0I_n-A\right)=\det\left(-A\right)=\left(-1\right)^n\det\left(A\right)$$

<u>הערה:</u>
למטריצות דומות אותו הפולינום האופייני. בכיוון ההפוך - איננו נכון.

הוכחה:

אם $A'\sim A$, אזי קיימת P כך ש־$A'=P^{-1}AP$. אם כן,

$$p_{A'}\left(x\right)=\det\left(xI-A'\right)=\det\left(xI-P^{-1}AP\right)=\det\left(xP^{-1}IP-P^{-1}AP\right)=$$
$$\det\left(P^{-1}\left(xI-A\right)P\right)=\det\left(P^{-1}\right)\det\left(xI-A\right)\det\left(P\right)=\frac{1}{\det(P)}\det\left(xI-A\right)\det\left(P\right)=$$
$$\det\left(xI-A\right)=p_A\left(x\right)$$

הפרכת הכיוון הנגדי:

ניקח $A=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A'=J_2\left(1\right)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$. מניתוח קודם, $A\nsim A'$, אבל קל לוודא שאכן $p_A\left(x\right)=p_{A'}\left(x\right)$.