יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

<u>משפט:</u> אם $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \exists M : |b_n| < M$ אז $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$)מכפלה של סדרה חסומה בסדרה ששואפת ל־0 זו סדרה ששואפת ל־0(

<u>הוכחה:</u> יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש־ a_n שואפת ל־0, לכל מרחק שיתנו לי קיים N כך שלכל $n > N$, מרחק איברי a_n מ־0 קטן מהמרחק ההתחלתי שנתנו לי, בפרט עבור המרחק $\frac{\epsilon}{M}$. מתקיים אז ש־

$$\exists N \forall n > N : |a_n| < \tfrac{\epsilon}{M} \Rightarrow \exists N \forall n > N : |a_n| \cdot M < \epsilon$$

אבל המרחק של $a_n b_n$ מ־0 הוא $|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le |a_n| \cdot M$ וראינו בשורה הקודמת שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים ש־ $|a_n| \cdot M \le \epsilon$ ולכן אם ניקח את אותו N, לכל $n > N$ יתקיים ש־ $|a_n b_n| < \epsilon$, ומכאן, לפי הגדרת הגבול, $a_n b_n$ שואפת ל־0. משל

דוגמה:

$a_n = \frac{\sin(n!)}{n}$ היא סדרה שנראית די מסובכת במבט ראשון, אבל היא מתכנסת ל־0. זאת משום שהיא מכפלה של סדרה חסומה, $\sin(n!)$)תמיד מתקיים ש־ $|\sin(x)| \le 1$ (וסדרה ששואפת ל־0, $\frac{1}{n}$

<u>תרגיל בית:</u> נסו להשתמש בכך שעבור 2 מספרים a, b תמיד מתקיים $||a| - |b|| \le |a - b|$ כדי להוכיח שאם $a_n \to L$ אז $|a_n| \to |L|$. הפריכו את המשפט ההפוך.

<u>משפט:</u> $a_n \to L \Leftrightarrow a_n - L \to 0$.

<u>משפט:</u> אם 2 הסדרות שואפות ל־0 אז גם הסכום והמכפלה שלהן שואפות ל־0.

<u>הוכחה:</u> כדי להוכיח שהמכפלה שואפת ל־0, פשוט נזכור שאחת הסדרות חסומה)כי מתכנסת(והשנייה שואפת ל־0 ולכן המכפלה שלהן שואפת ל־0. עבור סכום, צריך להוכיח ש־ $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n b_n - 0| < \epsilon$. יהי $\epsilon > 0$, מהנתון ומהגדרת גבול אנו יודעים ש־

$$\exists N_1 \forall n > N_1 : |a_n - 0| < \tfrac{\epsilon}{2}$$
$$\exists N_2 \forall n > N_2 : |b_n - 0| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

לכן אם נגדיר $N = max\{N_1, N_2\}$ יתקיים

$$\forall n > N : |a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

מצאנו N כנדרש. משל

<u>משפט:)אריתמטיקה של גבולות(נניח ש־ $a_n \to a, b_n \to b$)כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ (אזי:</u>

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
3. אם c קבוע אז $c \cdot a_n \to ca$
4. אם $a > 0$ אז $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$

<u>הוכחה:</u>

1. נסמן $x_n = a_n - a, y_n = b_n - b$ ועפ"י משפט, הם שואפים ל־0. מהמשפט הקודם, הסכום שלהם שואף ל־0: $x_n + y_n = a_n - a + b_n - b = (a_n + b_n) - (a + b) \to 0$. לפי משפט, זה אומר ש־ $a_n + b_n \to a + b$

2. אם נסתכל על אותם x_n, y_n אז מהמשפט הקודם, המכפלה שלהם שואפת ל־0.

$$a_n b_n = (x_n + a)(y_n + b) = x_n y_n + a \cdot y_n + b \cdot x_n + ab$$

כל אחד מארבעת הרכיבים מתכנס: הראשון ל־0, השני והשלישי הם סדרות ששואפות ל־0 כפול מספר קבוע)שאפשר להתייחס אליו כאל סדרה חסומה(ולכן שואפות ל־0 והרביעי הוא סדרה קבועה ששואפת ל־ ab. סך הכל, מהדבר האחרון שהוכחנו)סכום גבולות(, $a_n b_n \to ab$

3. נגדיר $\forall n : c_n = c$ ונראה ש־ $c_n \to c$, ממשפטון 2 נקבל את הדרוש

4.יהי אפסילון גדול מ־0. נראה שמתקיימים הדברים הבאים:

$\exists N_0 \forall n > N_0 : ||a_n| - |a|| < |a|$)לקחנו את הערך המוחלט של a להיות האפסילון(.

לכן עבור $n > N_0$ מתקיים ש־ $|a| < 2|a_n|$

$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| = |\frac{a-a_n}{a_n a}| = \frac{|a-a_n|}{|a_n||a|} \leq |a - a_n|\frac{2}{|a_n||a|}$

עפ"י הגדרת הגבול

$\exists N \forall n > N : |a_n - a| \leq \epsilon\frac{|a|^2}{4}$

מכאן שלכל $n > N$

$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}| \leq |a_n - a|\frac{2}{|a_n||a|} \leq \epsilon\frac{|a|^2}{4}\frac{2}{|a_n||a|} = \epsilon\frac{|a|}{2|a_n|} < \epsilon\frac{2|a_n|}{2|a_n|} = \epsilon$

משל