1 דמיון מטריצות

הגדרה:
אומרים שמטריצה A <u>דומה</u> למטריצה B אם קיימת מטריצה הפיכה P שעבורה מתקיים $B=P^{-1}AP$. מסמנים זאת $A\sim B$.
<u>הערה:</u>
דמיון הוא יחס שקילות, כלומר הוא:

1. רפלקסיבי - $A\sim A$ (עבור $P=I$).
2. סימטרי - אם $A\sim B$ אזי $B\sim A$ (אם $B=P^{-1}AP$ אזי $A=PBP^{-1}$)
3. טרנזיטיבי - אם $A\sim B$ וגם $B\sim C$ אזי $A\sim C$ (אם $B=P^{-1}AP$ וגם $C=Q^{-1}BQ$ אזי $C=Q^{-1}P^{-1}APQ=(PQ)^{-1}A(PQ)$)

<u>הערה</u>
אם V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, $T:V\to V$ אופרטור לינארי, B_1,B_2 שני בסיסים של V, A_1,A_2 המטריצות המייצגות של T יחסית ל-B_1,B_2 בהתאמה ואם P מטריצת המעבר מ-B_1 ל-B_2, אזי $A_2=P^{-1}A_1P$.
ההערה הזו בעצם נותנת לנו אינטואיציה מה המשמעות של דמיון מטריצות: שתי מטריצות הן דומות אם ורק אם הן מייצגות את אותה העתקה בבסיסים שונים.
<u>הערה:</u>
אם $A\neq I$, אזי A אינה דומה ל-I.
הוכחה:
נניח בשלילה ש-$I\sim A$. זאת אומרת שקיימת P כך ש-$I=P^{-1}AP$. נכפול ב-P משמאל, ונקבל $P=AP$. נכפול ב-P^{-1} מימין, ונקבל $I=A$, בסתירה.
המשמעות של ההערה הקודמת - המטריצה המייצגת היחידה של העתקת הזהות היא מטריצת היחידה. אכן, ניתן לוודא זאת בקלות גם באמצעות כלים של לינארית 1. כעת נכליל את הטענה:
<u>הערה:</u>
אם A איננה מטריצה סקלרית (זאת אומרת, $A\neq\alpha I$), אזי A אינה דומה לאף מטריצה סקלרית.
ההוכחה דומה לזו של ההערה הקודמת. נעיר שגם פה, כל מטריצה סקלרית היא מטריצה מייצגת של העתקת מתיחה / כיווץ, כלומר העתקת הזהות כפול סקלר כלשהו. גם במקרה זה ניתן לחשב ישירות את המטריצה המייצגת, ולגלות שהיא תמיד אותה סקלרית.
משפט:
אם A_1,A_2 מטריצות דומות אזי $spec\left(A_1\right)=spec\left(A_2\right)$.
הוכחה:
יהי λ ע"ע של A_1 בה"כ, לכן לפי משפט $\det\left(\lambda I-A_1\right)=0$. $A_1\sim A_2$, לכן קיימת מטריצה P הפיכה שעבורה $A_2=P^{-1}A_1P$. נשים לב כי $\det\left(\lambda I-A_2\right)=\det\left(\lambda P^{-1}P-P^{-1}A_1P\right)=\det\left(P^{-1}\left(\lambda I-A_1\right)P\right)=\det\left(P^{-1}\right)\det\left(\lambda I-A_1\right)\det\left(P\right)=0$
ולכן לפי משפט λ ע"ע של A_2.
מכאן נגיע למסקנה כי $spec\left(A_1\right)=spec\left(A_2\right)$.
במילים אחרות, אם שתי מטריצות הן דומות, יש להן אותם ערכים עצמיים)אך לא אותם וקטורים עצמיים בהכרח!(. אם כן, נוכל להגיע למסקנה הבאה:
מסקנה:
$spec\left(T\right)=spec\left(A\right)$ למטריצה מייצגת A כלשהי.
<u>הערה:</u>
אם $A_1\sim A_2$, אזי $\det\left(A_1\right)=\det\left(A_2\right)$.
כעת ננסה להתעסק בשאלה כללית: מתי מטריצה נתונה A דומה למטריצה אלכסונית.

2 לכסון מטריצות

הגדרה:
אומרים שמטריצה A לכסינה (או ניתנת ללכסון) אם A דומה למטריצה אלכסונית D, כלומר אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש־ $P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית. המטריצה P נקראת המטריצה המלכסנת.
הערה
לכסון עוזר בהעלאה בחזקה של מטריצה. הסבר:
נניח ש־A לכסינה ו־$k \in \mathbb{N}$. נניח ש־P היא המטריצה המלכסנת של A, ונניח $D = P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית. אזי:

$$A^k = \left(PDP^{-1}\right)^k = \underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right)}_{k\text{ TIMES}} = PD^kP^{-1}.$$

לכאורה, לא נפטרנו מהבעיה; עדיין צריך להעלות מטריצה בחזקה גבוהה. אבל D אלכסונית, נניח $D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$. אזי $D^k = \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n^k \end{pmatrix}$ וזה קל לחישוב!

משפט: קריטריון בסיסי ללכסון מטריצה
מטריצה A לכסינה אם ורק אם יש ב־F^n בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של A.
אם $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, אזי איברי הבסיס הנ"ל הם עמודות המטריצה P.

הוכחה:
$\Leftarrow$
נניח שהמטריצה A לכסינה, $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. נסמן $e_1, \ldots, e_n$ וקטורי היחידה. ניקח $1 \le i \le n$, ונשים לב כי

$$P^{-1}APe_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_i e_i$$

, לכן e_i ו"ע של $P^{-1}AP$ הקשור לע"ע λ_i ($A \sim P^{-1}AP$), לכן λ_i ע"ע של A). קיבלנו כי $P^{-1}APe_i = \lambda_i e_i$. נכפול ב־$P$ משמאל, ואז $A(Pe_i) = \lambda_i(Pe_i)$.
$v_i = Pe_i$, לכן $Av_i = \lambda_i v_i$. $v_i = \begin{pmatrix} | & & | \\ p_1 & \cdots & p_n \\ | & & | \end{pmatrix}$.
$\Rightarrow$
נניח שקיים בסיס $\{v_1, \ldots, v_n\}$ המורכב מו"ע של A. נוכיח ש־A לכסינה. נגדיר

$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$. $Pe_i = v_i$, לכן $e_i = P^{-1}v_i$. נשים לב כי: $AP =$ $A \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$ ולכן

מצאנו מטריצה הפיכה P כך ש-$P^{-1}AP$ אלכסונית, כדרוש.

<u>הערה:</u>

איברי האלכסון הראשי של מטריצה אלכסונית הם הערכים העצמיים שלה.

2.1 דוגמה - בלוק ז'ורדן

הגדרה:

מטריצה מהצורה $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ (מגודל $n \times n$) נקראת <u>בלוק (או תא) ז'ורדן</u> מגודל n.

טענה:

אם $n \geq 2$, אזי J_λ איננה לכסינה.

הוכחה:

נחפש ו"ע של $J_n(\lambda)$. יהי $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ו"ע של $J_n(\lambda)$. λ הוא הע"ע היחיד של $J_n(\lambda)$ (כי הוכחנו כאשר דיברנו על ע"ע שעבור מטריצה משולשת, הע"ע הם האיברים שעל האלכסון הראשי שלה). נשים לב:

$$J_n(\lambda) v = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 + \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_{n-1} + \alpha_n \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_{n-1} \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

קיבלנו מערכת משוואות:

$$\begin{cases} \lambda\alpha_1 + \alpha_2 = \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_{n-1} + \alpha_n = \lambda\alpha_{n-1} \\ \lambda\alpha_n = \lambda\alpha_n \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

לכן כל ו"ע של $J_n(\lambda)$ הוא מהצורה $v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, אבל $V_\lambda(J_n(\lambda)) = \{v \in \mathbb{F}^n \mid J_n(\lambda)v = \lambda v\}$ מרחב וקטורי ממימד 1, לכן למרחב הוקטורי $\mathbb{F}^n$ אין בסיס המורכב מו"ע של $J_n(\lambda)$, ולכן $J_n(\lambda)$ אינו לכסין.

בעצם, מה הפריע לנו? לא היו מספיק וקטורים עצמיים לערך העצמי λ. בלוק ז'ורדן הוא דוגמה חשובה, והיא תחזור בהמשך הקורס ותקבל תפקיד משמעותי ביותר.