1 הקדמה

1.1 קבוצות מספרים

הפעם הראשונה שאנו לומדים לספור היא בעזרת האצבעות- אצבע אחת, שתי אצבעות וכן הלאה. במתמטיקה אנו קוראים למספרים האלה טבעיים ומסמנים:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

את המספרים הטבעיים אנחנו יכולים לחבר אחד עם השני, אבל פעולת החיסור לא מוגדרת היטב, משום שעבור $2-1$ אין תוצאה בקבוצת הטבעיים. כדי לטפל בבעיה זו, נגדיר את קבוצת השלמים $\{0, \pm1, pm2, ...,\} = \mathbb{Z}$. אך גם בקבוצה זו מתעוררת בעיה, משום שלא ניתן לבצע פעולת חילוק. נגדיר את המספרים הרציונאליים)מהמילה האנגלית OITAR, יחס(, להיות כל השברים מהצורה $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}|p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$, המספרים הרציונאליים הם כל המספרים שמתקבלים כיחס בין 2 מספרים שלמים. נשים לב שכל מספר שלם a הוא רציונאלי משום שניתן להצגה כ- $\frac{a}{1}$, יחס של 2 מספרים שלמים.

האם בזאת כיסינו את כל המספרים שאנחנו מכירים? לא, לדוגמה π, e הם מספרים לא רציונאליים)כרגע לא צריך לדעת את המשמעות של כל אחד מהם(. גם המספר $\sqrt{2}$ לא רציונאלי. ההוכחה של זה מסתמכת על הרעיון של "הוכחה על דרך השלילה", אנחנו נניח שמה שאנחנו רוצים להוכיח לא נכון ונגיע לסתירה:

נניח ש- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, אזי לפי הגדרה קיימים מספרים שלמים p, q ש- $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, בפרט אפשר להניח שזהו שבר "מצומצם", כלומר אם לדוגמה היה לנו $\frac{16}{34}$ נדאג לצמצם ל- $\frac{8}{17}$. לכל שבר יש צורה שאי אפשר לצמצם יותר, אנחנו נראה שאם $\sqrt{2}$ ניתן להציג כשבר, אין לו צורה כזאת, ומכאן תבוא הסתירה.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע, ונקבל:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

ולכן

$$2q^2 = p^2$$

כלומר p^2 הינו מספר זוגי)הוא מתחלק ב־2(ומכאן שגם P זוגי. נסמן אם כך $p = 2a$. ולכן:

$$2q^2 = 4a^2$$

נחלק ב2 את שני האגפים ונקבל

$$q^2 = 2a^2$$

כלומר גם Q הינו מספר זוגי. אבל זה לא ייתכן, כיוון שהצגנו את שורש 2 כשבר מצומצם. לכן הגענו לסתירה המצביעה על העובדה שההנחה שלנו היא לא נכונה. ההנחה שלנו כמובן היא ששורש 2 הוא מספר רציונאלי.

לכן נרצה להגדיר את המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$, הגדרה מדויקת יותר של הקבוצה נראה בהמשך. כרגע רק צריך לשים לב לעובדה שכל מספר ממשי ניתן לקרב אותו באיזו רמת דיוק שאנחנו רוצים ע"י מספר רציונאלי, לדוגמה אם נבחר לקרב את שורש 2 על ידי 01 הספרות הראשונות שלו, נקבל מספר רציונאלי:

$$1.4142135623 = \frac{14142135623}{10000000000}$$

1.2 חזקות

עבור מספר ממשי x ומספר טבעי n נגדיר x^n להיות מכפלה של X בעצמו N פעמים. לדוגמה:

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81, 6^2 = 6 \cdot 6 = 36, 12^1 = 12$$

אומרים ש־X הוא בסיס החזקה ו־N הוא המעריך.

נשים לב ש-

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ TIMES}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ TIMES}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n \text{ TIMES}} = a^{m+n}$$

לדוגמה $11^3 \cdot 11^4 = 11^{3+4} = 11^7$. בנוסף אם בסיס החזקה שונה מ־0, ניתן להפיק את הכלל הבא:

$$a^m = a^{m-n+n} = a^{m-n} \cdot a^n \Rightarrow a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

מהכלל הזה ניתן להגדיר חזקה עם מעריך שלם:

$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$ (עבור $a = 0$ לא מוגדרת החזקה 0 בחזקת 0)

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

לדוגמה

$$3^0 = 1$$

$$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

מה אם המעריך לא שלם? קודם כל, צריך לשים לב לעוד כלל חזקות חשוב:

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot (a^m) \cdots (a^m)}_{n \text{ TIMES}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ TIMES}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ TIMES}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m \text{ TIMES}}}_{n \text{ TIMES}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \cdot n \text{ TIMES}} = a^{m \cdot n}$$

אחת הפעולות ההפוכות לחזקה היא שורש, ו־ $\sqrt[n]{x}$ מוגדר להיות המספר שאם נעלה בחזקת N, נקבל את X. לדוגמה:

$\sqrt[2]{9} = 3$ כי $3^2 = 9$

$\sqrt[5]{243}$ הוא המספר שאם נעלה בחזקת 5 נקבל 342, והתשובה היא 3, משום ש־ $3^5 = 243$

במקרה ש־ $n = 2$, במקום $\sqrt[2]{x}$ מקובל לסמן $\sqrt{x}$

כעת, נשים לב לכך ש־

$$a = a^1 = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = (a^{\frac{1}{n}})^n$$

ומכאן ש־ $a^{\frac{1}{n}}$ הוא מספר אם נעלה אותו בחזקת N נקבל את A, כלומר לפי הגדרה, השורש ה־N־י של A. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. הגענו ששורש הוא סוג של חזקה, ולכן ניתן בקלות להגיע לחוקי שורשים שאנלוגיים לחוקי החזקות. בנוסף אפשר להגדיר עכשיו חזקה עם מעריך רציונאלי:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1.3 לוגריתמיים

ראינו ששורש היא פעולה הפוכה לחזקה ששימושית במקרה שאנחנו רוצים לשחזר את בסיס החזקה (לדוגמה "מה בחזקת 4 שווה 18? $\sqrt[4]{81}$), אבל זה לא עוזר לנו כשאנחנו רוצים לשחזר את המעריך (כמה פעמים אני צריך לכפול את 2 בעצמו כדי לקבל 4201? או במילים אחרות, איזה N פותר את המשוואה $2^n = 1024$?). בשביל שנוכל לענות על שאלות כאלה, נגדיר את פעולת הלוגריתם:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. כלומר $\log_a b$ הוא המעריך שצריך להעלות את A בחזקתו כדי לקבל את B:

$$a^{\log_a b} = b$$

בנוסף, A נקרא "בסיס הלוגריתם".

כמה דוגמאות:

$\log_2 1024 = 10$ כי $2^{10} = 1024$

$\log_4 8 = \frac{3}{2}$ כי $4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$

כאשר בסיס הלוגריתם הוא המספר E, נסמן הרבה פעמים log בלי לציין את הבסיס (משום ש־E הוא "הבסיס הטבעי" (או שנכתוב במקום זאת ln) ואומרים "לאן"). יש לשים לב שבמחשבונים רבים כאשר לא מצויין בסיס הלוג מתכוונים לבסיס 01.

1.4 חוקי לוגריתמים

עבור $\log_a b$, בסיס הלוגריתם צריך להיות חיובי ששונה מ־1 ו־B חיובי. אם ננסה להגדיר לוגריתם עם בסיס שלילי, נגיע לבעיות שאין להם תשובה במספרים הממשיים, ואם הבסיס היה 1, נקבל ש־ $1 = 1^{\log_a b} = a^{\log_a b} = b$. אחרי שהגדרנו שהבסיס חיובי, $a^{\log_a b} = b$ חיובי משום שחזקה עם בסיס חיובי חייבת להיות חיובית.

$a^0 = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$

$a^1 = a \Rightarrow \log_a a = 1$

$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = x \cdot y \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$

את שאר התכונות נסו להוכיח בעצמכם:

$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$

$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$

$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$ ־ תכונה זו מאוד חשובה ובעצם אומרת איך אפשר להחליף את הבסיס של הלוגריתם לכל בסיס שאנחנו רוצים)M(. מתכונה זו, אם נרצה לחשב במחשבון)שיודע לחשב לוגריתם רק לפי בסיס 01(את $\log_2 6$, נוכל לחשב במקום את $\frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2}$

1.5 הערך המוחלט ואי שיוויונים

הערך המוחלט של מספר ממשי הוא המרחק שלו מ־0. לדוגמא:

$|7| = |-7| = 7$

ההגדרה המדוייקת של הערך המוחלט היא:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

1.6 תכונות הערך המוחלט

לכל X מתקיים $|x| \geq 0$

$|x| = 0$ אם ורק אם $x = 0$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

$x \leq |x|$

אי שיוויון המשולש: $|x + y| \leq |x| + |y|$

$||x| - |y|| \leq |x - y|$

$|x - y|$ הוא המרחק בין X לבין Y

נניח $L \geq 0$ אזי $|x| \leq L$ אם ורק אם $-L \leq x \leq L$ $|x| \geq L$ אם ורק אם $x \geq L$ או $x \leq -L$

1.7 תכונות של אי שיוויונים

$x \leq y$ אם ורק אם $-x \geq -y$

נניח $0 \leq x, y$ אזי $x \leq y$ אם ורק אם $x^2 \leq y^2$

נניח $0 < x, y$ אזי $x \leq y$ אם ורק אם $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

2 אינפי 1

2.1 חסמים

הגדרה: תהי U סדורה ותהי תת קבוצה $A \subseteq U$, אזי:

$M \in U$ נקרא חסם מלעיל של A אם $\forall a \in A : a \leq M$
$m \in U$ נקרא חסם מלרע של A אם $\forall a \in A : a \geq m$
חסם מלעיל של A נקרא מקסימום אם הוא שייך לקבוצה A
חסם מלרע של A נקרא מינימום אם הוא שייך לקבוצה A
חסם מלעיל של A נקרא החסם העליון של A אם אין ל-A חסם מלעיל קטן ממש ממנו.
(כלומר, החסם העליון הוא המינימום מבין קבוצת חסמי המלעיל, אם כזה קיים.)
חסם מלרע של A נקרא החסם התחתון של A אם אין ל-A חסם מלרע גדול ממש ממנו.
(כלומר, החסם התחתון הוא המקסימום מבין קבוצת חסמי המלרע, אם כזה קיים.)
שימו לב לשלילות הבאות:
M אינו חסם מלעיל אם"ם קיים איבר M>A
M אינו חסם מלרע אם"ם קיים איבר M<A
M אינו חסם עליון אם"ם הוא אינו חסם מלעיל או שקיים חסם מלעיל הקטן ממש ממנו.
M אינו חסם תחתון אם"ם הוא אינו חסם מלרע או שקיים חסם מלרע הגדול ממש ממנו.
אקסיומת השלימות של המספרים הממשיים - לכל $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל (מלרע) קיים חסם עליון (תחתון).

ניתן לראות ששדה הרציונאליים אינו שלם. נגדיר קבוצה של כל המספרים הרציונאליים אשר בריבוע קטנים משתים (כלומר המספרים שקטנים משורש שתים). לכל חסם מלעיל של הקבוצה, יש חסם מלעיל הקרוב יותר לשורש שתים הקטן ממנו (שכן שורש שתים עצמו אינו רציונאלי ולכן לא יכול להוות חסם מלעיל). לכן אין אף חסם עליון לקבוצה החסומה מלעיל שבנינו.

משפט. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי:
M חסם עליון של A אם"ם M חסם מלעיל של A וגם לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $a > M - \epsilon$
M חסם תחתון של A אם"ם M חסם מלרע של A וגם לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $a < m + \epsilon$

במילים: M חסם עליון אם הוא חסם מלעיל וגם אין חסם מלעיל הקטן ממנו. כלומר, כל מספר הקטן ממנו אינו חסם מלעיל. כלומר, אם נקטין את M בגודל כלשהו שאינו אפס נקבל מספר שאינו חסם מלעיל. מספר אינו חסם מלעיל אם"ם יש איבר בקבוצה הגדול ממנו. (ניסוח דומה עבור החסם התחתון.)

הוכחה. נניח M חסם עליון. מתוך ההגדרה של חסם עליון נובע בפרט ש-M חסם מלעיל. נותר להוכיח כי :: $\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > M - \epsilon$

נניח בשלילה כי קיים $\epsilon > 0$ כל שלכל האיברים $a \in A$ מתקיים $a \leq M - \epsilon$.

לכן, לפי ההגדרה, $M - \epsilon$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה. מכיוון שאפסילון גדול מאפס, $M - \epsilon$ הוא חסם מלעיל קטן ממש מהחסם העליון M, בסתירה לכך שהוא חסם המלעיל הקטן ביותר.