1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה:

תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. אומרים ש־$\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי (ע"ע) של A, אם קיים וקטור $0\neq v\in\mathbb{F}^n$ שעבורו $Av=\lambda v$.

הוקטור v נקרא וקטור עצמי (ו"ע) של A הקשור ל־λ.

הגדרה:

אוסף כל הערכים העצמיים של A נקרא הספקטרום של A, ומסומן $spec(A)$.

הערה:

יכול להיות המצב $spec(A)=\emptyset$.

הרעיון בערכים עצמיים ווקטורים עצמיים הוא לדעת אילו וקטורים המטריצה מותחת או מכווצת. הווקטור העצמי ־ מי ההעתקה מותחת או מכווצת, והערך העצמי ־ פי כמה. בהמשך נראה שלערכים העצמיים ולווקטורים העצמיים יש תפקיד משמעותי ב"הבנת" מטריצות.

משפט:

$\lambda=0$ ערך עצמי של A אם ורק אם A איננה הפיכה.

הוכחה:

$\Leftarrow$ נניח $\lambda=0$ הוא ע"ע של A. זאת אומרת שקיים וקטור $0\neq v$ שעבורו $Av=0$. נסמן $v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$, וכן $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\\ \vdots a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$. נוכל להגיד שלפיכך

$$\begin{cases}a_{11}v_1+\cdots+a_{1n}v_n=0\\ \vdots\\ a_{n1}v_1+\cdots+a_{nn}v_n=0\end{cases}$$

היא מערכת הומוגנית (בת n משוואות מ־n נעלמים).

למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, ולכן A אינה הפיכה.

$\Rightarrow$ נניח ש־A הפיכה. נתבונן במערכת $Av=0$. יש לה פתרון לא טריוויאלי $v\neq 0$, ולכן מתקיים $Av=0=0\cdot v$, זאת אומרת ש־$\lambda=0$ הוא ע"ע של A.

תזכורת:

A איננה הפיכה אם ורק אם $\det(A)=0$.

משפט:

$\lambda\in\mathbb{F}$ **הוא ערך עצמי של מטריצה** $A\in M_n(\mathbb{F})$ **אם ורק אם** $\det(\lambda I-A)=0$.

הוכחה:

$\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ע"ע של A $\Leftrightarrow$ קיים $v\neq 0$ כך ש־$Av=\lambda v$ $\Leftrightarrow$ קיים $v\neq 0$ כך ש־$\lambda v-Av=0$ $\Leftrightarrow$ קיים $v\neq 0$ כך ש־$(\lambda I-A)v=0$ $\Leftrightarrow$ המטריצה $\lambda I-A$ אינה הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I-A)=0$.

המשפט מאפשר לנו לחשב ערכים עצמיים מבלי לנסות לכפול וקטורים במטריצה בתקווה ש"ייצא טוב". לפי המשפט, כדי למצוא ערכים עצמיים של המטריצה נוכל לפתור את המשוואה $\det(\lambda I-A)=0$. זהו פולינום ממעלה n, ובהמשך נקרא לו הפולינום האופייני של A, והוא ישחק תפקיד חשוב בתיאוריה שלנו.

1.1 דוגמה 1 ־ מטריצת היחידה

ניקח $A=I_n$, ונחפש את $spec(A)$. נבדוק בשתי שיטות:

1.1.1 שיטה ראשונה ־ חישוב ישיר

נניח ש־$I_nv=\lambda v$. מכאן, $v=\lambda v$, כלומר $\lambda=1$, כלומר $spec(I_n)=\{1\}$.

1.1.2 שיטה שנייה - לפי המשפט

נשים לב כי $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$. לכן, $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^n$ אם כן, $(\lambda-1)^n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, ולכן $spec(I_n) = \{1\}$.

לסיכום, הערך העצמי של מטריצת היחידה הוא 1, ומהחישוב שבחלק הראשון גילינו שכל הווקטורים הם וקטורים עצמיים שלו. זה אכן מתאים לדברים המוכרים - כל וקטור הכופלים במטריצת היחידה נשאר עצמו, המתיחה היא תמיד פי 1.

1.2 דוגמה 2 - מטריצה אלכסונית כללית

נסמן $A = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$

נרצה לדעת מהו $spec(D)$. על פי המשפט, נסתכל על $\lambda I - D$:

$$\lambda I - D = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix}.$$

הדטרמיננטה: $\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \alpha_i) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

קיבלנו ש-$spec(D) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

אכן, גם את התוצאה הזו יכולנו לצפות מראש! מטריצה אלכסונית מותחת בדיוק את וקטורי היחידה, $e_1, \ldots, e_n$ פי $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בהתאמה.

1.3 דוגמה שלישית - מטריצה משולשית עליונה

ניקח $A = T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$ מטריצה משולשית עליונה.

על פי הוכחה דומה לזו של מטריצה אלכסונית - מקבלים $spec(T) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

1.4 דוגמה רביעית

ניקח מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ את המטריצה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. אזי $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

לפי חישוב, $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1 = 0$, אבל למשוואה זו אין פתרונות ב-$\mathbb{R}$.

אם כן, $spec(A) = \emptyset$.

2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של אופרטורים

הגדרה:

<u>אופרטור לינארי</u> $T : V \to V$ הוא העתקה לינארית מ-V לעצמו.

המשמעות זהה למטריצות - אילו וקטורים האופרטור מותח או מכווץ.

2.1 הגדרת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים והקשר למטריצות המייצגות

הגדרה:
יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש־$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי (ע"ע) של האופרטור T אם קיים $0 \neq v \in V$ שעבורו $Tv = T(v) = \lambda v$. הוקטור v נקרא וקטור עצמי (ו"ע) של T הקשור ל־λ.

משפט:
יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V ותהי A המטריצה המייצגת של T יחסית ל־B. אזי אם $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T, הוא גם ערך עצמי של A.

הוכחה:
נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

A היא המטריצה המייצגת של T יחסית ל־B, ולכן $Tv = A \cdot [v]_B$. λ ע"ע של T, אזי קיים $v \neq 0$ כך ש־$Tv = \lambda v$, זאת אומרת $cdot\, [v]_B = \lambda\, [v]_B$, ולכן λ ע"ע של A.

2.2 אלגוריתם למציאת ערכים עצמיים של אופרטור

1. נבחר בסיס B של V.
2. נחשב את המטריצה המייצגת A.
3. נרכיב את המשוואה $\det(\lambda I - A) = 0$. זוהי משוואה ממעלה n.
4. מחפשים פתרונות $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.