1 המשך – הפולינום המינימלי

נמשיך עם הנושא של פולינומים מינימליים מההרצאה הקודמת, וננסה להוכיח, כפי שאמרנו, שהשורשים של הפולינום המינימלי הם בדיוק הערכים העצמיים של המטריצה.

משפט 1. *יהי $f\in\mathbb{F}[x]$ פולינום מאפס למטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$, ונניח $\deg(f)\leq n$. אזי $p_A(x)\,|\,[f(x)]^n$.*

הוכחה. נחפש מטריצות ריבועיות $B_0,\ldots,B_{n-1}\in M_n(\mathbb{F})$ שעבורן

$$B(x)=B_0+B_1x+\cdots+B_{n-1}x^{n-1}$$

מקיימת את המשוואה הבאה:

$$(\star)\,(xI-A)\cdot B(x)=f(x)\cdot I$$

נסמן $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. נשווה את המקדמים לפני החזקות של x:

	x^n	x^{n-1}	$\cdots$	x^2	x^1	x^0
שמאל	B_{n-1}	$B_{n-2}-AB_{n-1}$	$\cdots$	B_1-AB_2	B_0-AB_1	$-AB_0$
ימין	a_nI	$a_{n-1}I$	$\cdots$	a_2I	a_1I	a_0I

משוויון המקדמים שאנו מחפשים, נקבל

$$B_{n-1}=a_nI,B_{n-2}=a_{n-1}I+AB_{n-1},\ldots,B_1=a_2I+AB_2,B_0=a_1I+AB_1$$

אם נכפול את המקדם של x^i ב-A^i, ונחבר את הכל, נקבל $0=0$. מכאן שהמשוואה הראשונה מתקיימת גם כן. נפעיל דטרמיננטה על $(\star)$:

$$\det[(xI-A)B(x)]=\det(f(x)I)$$

על פי כפליות הדטרמיננטה, נקבל

$$\det(xI-A)\det B(x)=\det\begin{pmatrix}f(x) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & f(x)\end{pmatrix}$$

נסמן $\det B(x)=g(x)$. אזי $p_A(x)g(x)=[f(x)]^n$, כלומר $p_A(x)\,|\,[f(x)]^n$, כדרוש.

$\square$

כעת נוכל לקבל את המסקנה שרצינו לגבי השורשים של הפולינום המינימלי. נזכור כי הפולינום המינימלי הוא פולינום מאפס שדרגתו לכל היותר n, ונקבל את המסקנה הבאה:

מסקנה 2.
$$m_A(x)\,|p_A(x)\,|\,[m_A(x)]^n$$

מסקנה 3. *ל-$p_A(x)$ ול-$m_A(x)$ יש אותם הגורמים האי-פריקים. לכן, יש להם אותם השורשים.*

דוגמה 1. נציג דוגמאות לפולינום מינימלי.

1. אם $A=\lambda I_n$, אזי $m_A(x)=x-\lambda$.

2. אם $A=J_n(\lambda)$, אזי $m_A(x)=(x-\lambda)^n$.

הוכחה. 1. קל לראות כי $x-\lambda$ הוא פולינום מאפס ל-λI_n, והוא בדרגה המינימלית האפשרית לפולינום מאפס. לכן, הוא פולינום מינימלי.

2. אם $A=J_n(\lambda)$, אזי $p_A(x)=(x-\lambda)^n$. לכן, הפולינום המינימלי הוא מהצורה $m_A(x)=(x-\lambda)^k$ עבור $1\le k\le n$ כלשהו. נציב את A, ונקבל

$$m_A(A)=(A-\lambda I)^k=\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}}_{N}^{k}=N^k$$

על ידי חישוב, ניתן לוודא כי $N^2\neq 0$, $N^3\neq 0$, וכן הלאה, עד ש-$N^{n-1}\neq 0$, אבל $N^n=0$. רוצים $m_A(A)=N^k=0$, כלומר $n\le k$. אבל גם אמרנו $1\le k\le n$. לכן, $k=n$, ומכאן מקבלים הדרוש.

$\square$

2 מטריצות אלכסוניות בלוקים

אנו עוברים לנושא הבא, שבו ננסה למצוא צורה שלישית שלה דומות מטריצות. כדי להבין מהי הצורה הזו, נצטרך להגדיר את המושג הבא:

הגדרה 1. מטריצה מהצורה

$$\begin{pmatrix}\boxed{A_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_k}\end{pmatrix}$$

כאשר $A_1,\dots,A_k$ מטריצות ריבועיות מגודל $n_1,\dots,n_k$ בהתאמה, נקראת **מטריצה אלכסונית בלוקים**. גודלה $n\times n$, כאשר $n=n_1+\cdots+n_k$.

הצורה השלישית שנראה תהיה מטריצה אלכסונית בלוקים, כשהבלוקים יהיו מטריצות מסוימות, הייחודיות לכל מטריצות (עד כדי דמיון).

הגדרנו מטריצות אלכסוניות בלוקים, ובעת ננסה לראות האם נוכל למצוא לה פולינום אופייני ומינימלי מבלי להתחיל לחשב אותם בכל פעם מחדש.

טענה 4. *תהי A מטריצה אלכסונית בלוקים. אזי:*

1.

$$p_A(x)=p_{A_1}(x)\dots p_{A_k}(x)$$

2.

$$m_A(x)=\mathrm{lcm}\left\{m_{A_1}(x),\dots,m_{A_k}(x)\right\}$$

<u>תזכורת:</u>

למספרים טבעיים, $\text{lcm}\left\{a_1,\ldots,a_k\right\}=\min\left\{M\mid a_1|M,\ldots,a_k|M\right\}$.

לפולינומים, זהו הפולינום המתוקן מהמעלה הקטנה ביותר מהקבוצה $\left\{g\in\mathbb{F}\left[x\right]\mid f_1|g,\ldots,f_k|g\right\}$.

הוכחה. נסמן $p_{A_i}\left(x\right)=p_i\left(x\right)$, $m_{A_i}\left(x\right)=m_i\left(x\right)$.

החלק הראשון על הפולינום האופייני קל לחישוב ישירות, על ידי דטרמיננטה של מטריצת בלוקים. אם כן, נוכיח רק את החלק השני.

לפי משפט קודם,

$$m_1\left(x\right)|p_1\left(x\right)|\left[m_1\left(x\right)\right]^n,\cdots,m_k\left(x\right)|p_k\left(x\right)|\left[m_k\left(x\right)\right]^n$$

נסמן $g\left(x\right)=\text{lcm}\left\{m_{A_1}\left(x\right),\ldots,m_{A_k}\left(x\right)\right\}$. נוכיח $m_A=g$ לפי השלבים הבאים:

1. אם $f\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינום כלשהו, אזי

$$f\left(A\right)=\begin{pmatrix}f\left(A_1\right) & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & f\left(A_k\right)\end{pmatrix}$$

זה נכון מפני שמתקיים:

(א)

$$A^\ell=\begin{pmatrix}A_1^\ell & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_k^\ell\end{pmatrix}$$

(ב)

$$\alpha A=\begin{pmatrix}\alpha A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha A_k\end{pmatrix}$$

(ג) אם $A,\tilde{A}$ שתי מטריצות אלכסוניות בלוקים כשהבלוקים מאותו גודל (מטריצות מאותו מבנה), אזי

$$A+\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_1+\tilde{A}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_k+\tilde{A}_k\end{pmatrix}$$

2. אם $f\left(A\right)=0$, אזי $f\left(A_i\right)=0$ לכל $i=1,\ldots,k$.

3. $m_A\left(A_i\right)=0$ לכל $i=1,\ldots,k$ (לפי השלב הקודם).

4. לכל $i=1,\ldots,k$, מתקיים $m_i|m_A$. נימוק: נשתמש בחילוק עם שארית.

$m_A=q\cdot m_i+r$, כאשר $\deg\left(r\right)<\deg\left(m_i\right)$ או $r=0$. נציב A_i, ונקבל $m_A\left(A_i\right)=q\left(A_i\right)\cdot m_i\left(A_i\right)+r\left(A_i\right)$, כלומר $0=q\left(A_i\right)\cdot 0+r\left(A_i\right)$, ומכאן $r\left(A_i\right)=0$. לכן, אם $\deg\left(r\right)<\deg\left(m_i\right)$, נקבל סתירה למינימליות של m_i, כלומר $r=0$.

5. אם כן, $g|m_A$, כי g הוא lcm.
6. עם זאת, $g\left(A_i\right)=0$ לכל $i=1,\ldots,k$, כי לכל i, מתקיים $m_i\left(A_i\right)=0$, וכן ידוע $m_i|g$.
7. לכן, $g\left(A\right)=0$.
8. אם כן, $g|m_A$.
9. מ-5, מ-8 ומהעובדה ששני הפולינומים מתוקנים, נקבל $g=m_A$, כדרוש.

$\square$