**משפט:** (קאלי־המילטון, Cayley-Hamilton)
$p_A(A)=0$.

<u>תזכורת:</u>

בהוכחת המשפט ניעזר במושג מהקורס לינארית 1: המטריצה הנלווית הקלאסית הינה $[adjA]_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ji}$, כאשר $M_{ji}$ הוא המינור ה־$ji$ ־ מורידים מהמטריצה $A$ את השורה ה־$j$ ואת העמודה ה־$i$.

אחד המשפטים החשובים לגבי המטריצה הנלווית הינו $A\cdot adjA=\det(A)\cdot I$.

*הוכחה:*

תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. נתבונן במטריצה $xI_n-A$. לפי התזכורת הנ"ל, מתקיים $(xI_n-A)\cdot adj(xI_n-A)=\det(xI_n-A)\cdot I$

נציג את הביטוי באגף שמאל בצורה הבאה: $adj(xI-A)=B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n$.
נשים לב שלפי הגדרת המטריצה הנלווית, כל הדטרמיננטות הן של מטריצות מגודל $(n-1)\times(n-1)$. אם כן, $B_n=0$; החזקה הגבוהה ביותר ש־$x$ יופיע בה היא $n-1$.

נחזור למשוואה. נקבל $(xI-A)(B_0+B_1x+\cdots+B_nx^n)=\det(xI-A)\cdot I$.

נסמן $p_A(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. נתבונן במקדמים בכל אגף:

| | $x^n$ | $x^{n-1}$ | $\cdots$ | $x^2$ | $x^1$ | $x^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| שמאל | $B_{n-1}$ | $B_{n-2}-AB_{n-1}$ | $\cdots$ | $B_1-AB_2$ | $B_0-AB_1$ | $-AB_0$ |
| ימין | $I$ | $a_{n-1}I$ | $\cdots$ | $a_2I$ | $a_1I$ | $a_0I$ |

יש שוויון בכל עמודה בין השורות, כי אלו מקדמים של אותן חזקות. אם נציב $A$ בשני האגפים, עדיין נקבל שוויון. אם כן, נסתכל לפי החזקות:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| שמאל | $A^nB_{n-1}$ | $A^{n-1}B_{n-2}-A^nB_{n-1}$ | $\cdots$ | $A^2B_1-A^3B_2$ | $AB_0-A^2B_1$ | $-AB_0$ |
| ימין | $A^n$ | $a_{n-1}A^{n-1}$ | $\cdots$ | $a_2A^2$ | $a_1A$ | $a_0I$ |

נשים לב כי אם נסכום את השורות, יהיה שוויון. הסכום של השורה העליונה (אגף שמאל) מתאפס, ואילו הסכום של השורה התחתונה (אגף ימין) הינו $p_A(A)$.

בסך הכל, $p_A(A)=0$.

<u>הערה:</u>

הנימוק האחד הוא שהמטריצה $xI$ אינה סתם הכפלה של $I$ בסקלר; היא מסמלת מטריצה שעל האלכסון הראשי שלה מופיע $x$, ובשאר המקומות אפס. אם כן, הצבת $A$ במקום $x$ תאמר שהמטריצה $AI$ מסמלת מטריצה שבה $A$ על האלכסון בבלוקים ובשאר אפסים? החיסור לא יוגדר!

הנימוק השני הוא טכני ־ כפי שהוגדר, כשמציבים מטריצה בפולינום, מתקבלת מטריצה. עם זאת, בשיטה זו קיבלנו מספר...