1 פולינומים של מטריצות

הגדרה 1. יהי $f\in\mathbb{F}[x]$, $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ ($\forall i=0,\ldots,n: a_i\in\mathbb{F}$). תהי $A\in M_k(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית. נגדיר את **הערך של f במטריצה A** באופן הבא:

$$f(A)=a_0I_k+a_1A+\cdots+a_nA^n$$

חשוב לשים לב שהצבת מטריצה בפולינום מחזירה מטריצה ולא סקלר.

הגדרה 2. תהי $A\in M_k(\mathbb{F})$. אומרים ש-$f\in\mathbb{F}[x]$ הוא **פולינום מאפס** ל-A, אם $f\neq 0$ וגם $f(A)=0$. במילים, פולינום מאפס הוא פולינום (שונה מאפס) שהצבת המטריצה A בו מחזירה את מטריצת האפס.

משפט 1. *לכל מטריצה $A\in M_k(\mathbb{F})$ קיים פולינום מאפס.*

הוכחה. נתבונן במרחב הווקטורי $V=M_k(\mathbb{F})$, $\dim V=k^2=\ell$. נתבונן בקבוצה של איברי V הבאה: $\{I,A,A^2,\ldots,A^\ell\}$.

בקבוצה הזו יש $\ell+1$ איברים, אך המימד של V הוא ℓ, ומכאן שהיא תלויה לינארית. לכן, קיימים סקלרים $a_0,a_1,\ldots,a_\ell\in\mathbb{F}$ (לא כולם שווים אפס), כך שמתקיים

$$a_0I+a_1A+\cdots+a_\ell A^\ell=0$$

נגדיר פולינום $f\in\mathbb{F}[x]$, $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. עבורו $f\neq 0$ (כי לא כל הסקלרים הם אפס), וכן $f(A)=0$ (לפי הבנייה), כדרוש.

□

דוגמה 1. נראה שתי דוגמאות לפולינומים מאפסים.

1. עבור $A=I_k$, נסתכל על $f=x-1$. באופן ברור $f\neq 0$, וכן $f(A)=A-1\cdot I_k=I_k-I_k=0$. כלומר, f פולינום מאפס ל-A.

2. עבור

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

נסתכל על הפולינום האופייני $f=p_A(x)=\det(xI-A)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$.
נציב את A:

$$f(A)=A^2-(\lambda_1+\lambda_2)A+\lambda_1\lambda_2I=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_1\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$$

הדוגמה האחרונה מעניינת. נשאלת השאלה האם זהו צירוף מקרים, שהפולינום האופייני הוא מאפס של המטריצה, או שזה נכון רק למטריצות אלכסוניות (ואולי אפילו ללכסינות?). התשובה נתונה במשפט הבא, המוכיח שזה נכון תמיד.

משפט 2 (משפט קאלי-המילטון, Cayley-Hamilton). $p_A(A)=0$.

<u>תזכורת:</u>
בהוכחת המשפט ניעזר במושג מהקורס לינארית 1: המטריצה הנלווית הקלאסית הינה $[\text{adj }A]_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ji}$, כאשר M_{ji} הוא המינור ה-ji - מורידים מהמטריצה A את השורה ה-j ואת העמודה ה-i.

אחד המשפטים החשובים לגבי המטריצה הנלווית הינו $A\cdot\text{adj }A=\det(A)\cdot I$.

הוכחה. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נתבונן במטריצה $xI_n - A$. לפי התזכורת הנ"ל, מתקיים

$$(xI_n - A) \cdot \mathsf{adj}\,(xI_n - A) = \mathsf{det}\,(xI_n - A) \cdot I$$

נציג את הביטוי באגף שמאל בצורה הבאה:

$$\mathsf{adj}\,(xI - A) = B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n$$

נשים לב שלפי הגדרת המטריצה הנלווית, כל הדטרמיננטות הן של מטריצות מגודל $(n-1) \times (n-1)$. אם כן, $B_n = 0$; החזקה הגבוהה ביותר ש-x יופיע בה היא $n-1$. נחזור למשוואה. נקבל

$$(xI - A)\,(B_0 + B_1 x + \cdots + B_n x^n) = \mathsf{det}\,(xI - A) \cdot I$$

נסמן $p_A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. נתבונן במקדמים בכל אגף:

	x^n	x^{n-1}	$\cdots$	x^2	x^1	x^0
שמאל	B_{n-1}	$B_{n-2} - AB_{n-1}$	$\cdots$	$B_1 - AB_2$	$B_0 - AB_1$	$-AB_0$
ימין	I	$a_{n-1}I$	$\cdots$	$a_2 I$	$a_1 I$	$a_0 I$

יש שוויון בכל עמודה בין השורות, כי אלו מקדמים של אותן חזקות. אם נציב A בשני האגפים, עדיין נקבל שוויון. אם כן, נסתכל לפי החזקות:

שמאל	$A^n B_{n-1}$	$A^{n-1}B_{n-2} - A^n B_{n-1}$	$\cdots$	$A^2 B_1 - A^3 B_2$	$AB_0 - A^2 B_1$	$-AB_0$
ימין	A^n	$a_{n-1}A^{n-1}$	$\cdots$	$a_2 A^2$	$a_1 A$	$a_0 I$

נשים לב כי אם נסכום את השורות, יהיה שוויון. הסכום של השורה העליונה (אגף שמאל) מתאפס, ואילו הסכום של השורה התחתונה (אגף ימין) הינו $p_A(A)$.

בסך הכל, $p_A(A) = 0$.

□

הערה 1. לכאורה, ניתן להוכיח את המשפט באופן הבא: נסתכל על $p_A(x) = \mathsf{det}\,(xI - A)$, ונציב A. נקבל

$$p_A(A) = \mathsf{det}\,(AI - A) = \mathsf{det}\,(0) = 0$$

נציג שני נימוקים שבגללם הוכחה זו נכשלת.

הנימוק האחד הוא שהמטריצה xI אינה סתם הכפלה של I בסקלר; היא מסמלת מטריצה שעל האלכסון הראשי שלה מופיע x, ובשאר המקומות אפס. אם כן, הצבת A במקום x תאמר שהמטריצה AI מסמלת מטריצה שבה A על האלכסון בבלוקים ובשאר אפסים? החיסור לא יוגדר!

הנימוק השני הוא טכני - כפי שהוגדר, כשמציבים מטריצה בפולינום, מתקבלת מטריצה. עם זאת, בשיטה זו קיבלנו מספר...

2 הפולינום המינימלי

הגדרה 3. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. **הפולינום המינימלי** של A הוא פולינום $m_A(x)$, כך שמתקיימים התנאים הבאים:

1. m_A הוא פולינום מאפס ל-A.
2. m_A הוא פולינום מתוקן.
3. לכל פולינום f מאפס ל-A, מתקיים $\mathsf{deg}\,(m_A) \le \mathsf{deg}\,(f)$.

לכאורה, נראה שאין הכרח שיהיה פולינום מינימלי כזה. עם זאת, המשפט הבא יוכיח לא רק שקיים פולינום מינימלי לכל מטריצה, אלא שהוא גם יחיד.

משפט 3. *הפולינום המינימלי m_A קיים והוא יחיד.*

הוכחה. **קיום** יש פולינומים מאפסים (למשל, האופייני, לפי קאלי–המילטון). אם הפולינום המאפס איננו מתוקן, אזי נתקן אותו בעזרת חילוק במקדם הראשי. נבחר את המעלה הנמוכה ביותר, ונקבל פולינום מינימלי.

יחידות נניח $m, \tilde{m}$ שניהם פולינומים מינימליים. לכן, $\deg(m) = \deg(\tilde{m})$. שניהם מתוקנים, לכן אם $m \neq \tilde{m}$, אזי $f = m - \tilde{m}$ פולינום מאפס ממעלה נמוכה יותר, בסתירה. לכן $m = \tilde{m}$, והוכחנו יחידות.

□

הערה 2. $\deg(m) \leq n$.

הוכחה. לפי משפט קאלי–המילטון, p_A הוא פולינום מאפס, ולכן $\deg(m) \leq \deg(p_A) = n$.

□

עד כה הגדרנו את הפולינום המינימלי של מטריצה, והוכחנו שהוא קיים ויחיד. נשאלת שאלה טבעית – האם יש קשר בין הפולינום האופייני לבין הפולינום המינימלי?

משפט 4. *הפולינום המינימלי m_A מחלק את הפולינום האופייני p_A.*

הוכחה. נשתמש בחילוק עם שארית:

$$p_A(x) = q(x) \cdot m_A(x) + r(x)$$

אם נציב את המטריצה A, השוויון יישמר.
$p_A(A) = q(A) \cdot m_A(A) + r(A)$, מכאן $0 = 0 + r(A)$, כלומר $r(A) = 0$.
אם $r \neq 0$, אזי $\deg(r) < \deg(m_A)$, בסתירה להגדרת הפולינום המינימלי. לכן $r = 0$, זאת אומרת $p_A = q \cdot m_A$, כדרוש.

□

מסקנה 5. *השורשים של m_A הם ערכים עצמיים של A.*

בהמשך נראה שהכיוון ההפוך נכון גם הוא, ולסיכום – השורשים של הפולינום המינימלי הם בדיוק הערכים העצמיים.