1 חזרה ללכסינות

נחזור ללכסינות, ונמצא שני קריטריונים נוספים ללכסינות של מטריצה; האחד קשור בערכים עצמיים, והשני - בריבויים שלהם.

נמצא בעת קריטריון ללכסינות על ידי הערכים העצמיים. זוהי מסקנה ישירה מהטענה שווקטורים עצמיים הקשורים לערכים עצמיים שונים הם בלתי תלויים לינארית.

מסקנה 1. *אם למטריצה A מגודל $n \times n$ יש n ערכים עצמיים שונים, אזי A לכסינה.*

הוכחה. נתבונן ב-$B = \{v_1, \dots, v_n\}$, כאשר v_i ו"ע של A הקשור ל-λ_i (כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ הע"ע השונים של A). לפי המשפט שצוין, B בת"ל. כמו כן, $|B| = n$. לכן, לפי משפט השלישי חינם, B בסיס של $\mathbb{F}^n$, ומכאן ש-A לכסינה, על ידי הקריטריון הכללי ללכסון.
$\square$

בעת נמצא קריטריון ללכסינות, המסתמך על הריבויים האלגברי והגיאומטרי של הערכים העצמיים של המטריצה)או האופרטור(. ניזכר בדוגמה של בלוק ז'ורדן; הוא לא היה לכסין, מפני שלא היו מספיק וקטורים עצמיים הקשורים לערך העצמי λ. אם כן, נרצה שלכל ערך עצמי יהיו מספיק וקטורים עצמיים, ואת זאת נביע במשפט הבא:

משפט 2. *נניח ש-$p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים. אזי A לכסינה אם ורק אם לכל ע"ע λ של A, הריבוי הגיאומטרי m_λ שווה לריבוי האלגברי k_λ.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-A לכסינה. אזי למרחב $\mathbb{F}^n$ יש בסיס $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ המורכב מו"ע של A. נחלק את B ל-s תתי קבוצות, לפי הע"ע השונים $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, ונסמנן $B_1, \dots, B_s$. לכל λ_i נסמן ב-m_i את הריבוי הגיאומטרי שלו וב-k_i את הריבוי האלגברי שלו. נתבונן בסכום ?$m_1 + \cdots + m_s =$. מתקיים

$$m_1 + \cdots + m_s = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} \geq |B_1| + \cdots + |B_s| = n$$

מצד שני, $k_1 + \cdots + k_s = \deg p_A(x) = n$.

כמו כן, $k_i \geq m_i$ לכל $i = 1, \dots, s$.

אם כן, עד כה ידוע כי $n = k_1 + \cdots + k_s \geq m_1 + \cdots + m_s = n$. לכן,

$$k_1 + \cdots + k_s = m_1 + \cdots + m_s$$

ומכאן שמתקיים $k_1 = m_1, \dots, k_s = m_s$, כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שלכל $i = 1, \dots, s$ (לפי הסימונים הקודמים), $m_i = k_i$, ונוכיח ש-A לכסינה. בדי לעשות זאת, נוכיח של-$\mathbb{F}^n$ קיים בסיס המורכב מו"ע של A.

מההנחה $m_i = k_i$, נקבל $m_1 + \cdots + m_s = k_1 + \cdots + k_s = n$. לכל λ_i עבור $i = 1, \dots, s$, נתבונן במרחב העצמי V_{λ_i}. מתקיים $m_i = \dim V_{\lambda_i}$.

לכל $i = 1, \dots, s$ נבנה בסיס B_i של V_{λ_i}. אזי $|B_1| = m_1, \dots, |B_s| = m_s$.

נגדיר $B = \bigcup_{j=1}^{s} B_j$, ונוכיח ש-$B$ הוא הבסיס הנדרש. B מורכב מו"ע, על פי הבנייה.

נסמן $B_1 = \left\{v_1^{(1)}, \dots, v_1^{(m_1)}\right\}, \dots, B_s = \left\{v_s^{(1)}, \dots, v_s^{(m_s)}\right\}$. אזי

$$|B| = m_1 + \cdots + m_s = n$$

לכן, מספיק להוכיח ש-B בת"ל. ניקח צירוף לינארי מתאפס של איברי הקבוצה B:

$$(\star)\quad \underbrace{\alpha_1^{(1)}v_1^{(1)}+\cdots+\alpha_1^{(m_1)}v_1^{(m_1)}}_{w_1}+\cdots+\underbrace{\alpha_s^{(1)}v_s^{(1)}+\cdots+\alpha_s^{(m_s)}v_s^{(m_s)}}_{w_s}=0$$

אזי $w_1+\cdots+w_s=0$, וכן לכל $i=1,\dots,s$ מתקיים $w_i\in V_{\lambda_i}$, כלומר כל w_i הוא ו"ע של A הקשור ל-λ או אפס.

אם $w_i=0$, אזי $\alpha_i^{(1)}v_i^{(1)}+\cdots+\alpha_i^{(m_i)}v_i^{(m_i)}=0$. לכן, אם כל $w_i=0$, אז כל המקדמים בשוויון $(\star)$ שווים לאפס, וסיימנו.

נניח בשלילה שיש כמה אינדקסים i שעבורם $w_i\neq 0$. אזי w_i-ים אלו הם ו"ע הקשורים ל-λ_i. נסמן ב-I את אוסף כל האינדקסים הנ"ל, ונקבל $\sum_{i\in I}w_i=0$, בסתירה לבת"ל של ו"ע הקשורים לע"ע שונים. הסתירה מוכיחה את הדרוש.

□

2 שילוש מטריצות

סיימנו לדבר על לכסון מטריצות; הקריטריונים שבידינו ללכסון מטריצות הם רחבים ומספקים. עם זאת, ראינו שלא תמיד ניתן ללכסן מטריצות – למשל, ראינו את בלוק ז'ורדן. נרצה לדבר על מושג "חלש" יותר מלכסון, כזה שיהיה גם למטריצות שאינן לכסינות וגם למטריצות לכסינות. ואם לא מטריצה אלכסונית, אז ננסה משולשת (=משולשית):

הגדרה 1. אומרים ש-A **ניתנת לשילוש** אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש-$P^{-1}AP$ מטריצה משולשת. המטריצה P נקראת **המטריצה המשלשת**.

בהגדרה של שילוש מטריצות לא ציינו האם המטריצה $P^{-1}AP$ משולשת עליונה או תחתונה. מסתבר שאין הבדל:

הערה 1. אם C מטריצה משולשת עליונה, אזי C דומה למטריצה משולשת תחתונה.

הוכחה. נגדיר את המטריצה

$$P=\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \dots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$$

(כלומר, 1-ים על האלכסון המקיים $i+j=n+1$, ובשאר אפסים).

קל לבדוק כי $P^2=I$, ולכן $P^{-1}=P$.

נסתכל על $P^{-1}CP$. מתקיים

$$\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \dots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & & \star\\ & \ddots & \\ 0 & & c_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \dots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & & c_{nn}\\ & \dots & \\ c_{11} & & \star\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \dots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{nn} & & 0\\ & \ddots & \\ \star & & c_{11}\end{pmatrix}$$

.

□

הגדרנו שילוש מטריצות, והמטרה הייתה להחליש את הדרישות של לכסון; שיהיו בידינו יותר מטריצות שניתן לשלש מאשר ללכסן. המשפט הבא יראה לנו שהקריטריון לשילוש יחסית חלש, כלומר מטריצות רבות מקיימות אותו.

משפט 3. *מטריצה A ניתנת לשילוש אם ורק אם $p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-A ניתנת לשילוש, זאת אומרת $A \sim C$, כאשר C משולשת. אזי,

$$p_A(x) = p_C(x) = \mathsf{det}(xI - C) = \mathsf{det}\begin{pmatrix} x - c_{11} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & x - c_{nn} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n}(x - c_{jj})$$

כדרוש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-$p_A(x)$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים.
יהי $(x-\lambda)$ אחד מהגורמים, כאשר λ ע"ע של A. יהי v ו"ע של A הקשור ל-λ.
נשלים את הקבוצה $\{v\}$ לבסיס B של $\mathbb{F}^n$, נסמן $B = \{v, v_2, \dots, v_n\}$. נסמן ב-$P$ את מטריצת המעבר בין הבסיסים (הסטנדרטי ו-B). אזי יחסית לבסיס B נקבל:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = A_1$$

לכן, $p_A(x) = p_{A_1}(x) = (x-\lambda) \cdot p_{\tilde{A}}(x)$.
אם כן, $p_{\tilde{A}}(x)$ מתפרק לגורמים לינאריים. נשלים את ההוכחה באינדוקציה.
עבור $n = 1$ אין מה להוכיח.
נניח שהמשפט נכון ל-$n-1$, ונוכיח ל-n. בסימונים הנ"ל, $\tilde{A}$ ניתנת לשילוש, כלומר קיימת Q כך ש-$Q^{-1}\tilde{A}Q$ משולשת.
נגדיר

$$C = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

אזי

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & Q^{-1}\tilde{A}Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \star \\ & \star & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \star \end{pmatrix}$$

כדרוש.

□