1 פולינומים (על קצה המזלג) - המשך

נמשיך עם נושא הפולינומים מההרצאה הקודמת.
תזכורות מהשיעור הקודם:

הגדרה 1. **פולינום** הוא פונקציה מהצורה $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, כאשר $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{F}$.

הערה 1. ניתן להגדיר לכל $\alpha\in\mathbb{F}$, $f(\alpha)=a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0$.

נגדיר חיבור וכפל פולינומים באופן הבא: עבור $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ו-$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$,

1.
$$f+g:=\sum_{j=0}^{\max\{m,n\}}(a_j+b_j)x^j$$
(כאשר לכל $i>n$, $a_i=0$ ולכל $i>m$, $b_i=0$). במילים אחרות - חיבור לפי החזקות.

2.
$$fg=f\cdot g:=a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+\cdots$$

עם ההגדרות הללו מתקיים $(f+g)(\alpha)=f(\alpha)+g(\alpha)$ ו-$(fg)(\alpha)=f(\alpha)g(\alpha)$.

המשפט הבא מאוד אינטואיטיבי, ואכן הוכחתו גם כן איננה מאתגרת במיוחד. המשפט מאפיין מתי סקלר מהשדה הוא שורש של פולינום כלשהו.

משפט 1. *יהי $f\in\mathbb{F}[x]$, ויהי $\alpha\in\mathbb{F}$ שורש של f (זאת אומרת, $f(\alpha)=0$). אזי קיים פולינום $g\in\mathbb{F}[x]$ שעבורו $f=(x-\alpha)g$.*

הוכחה. נשתמש בחילוק עם שארית לזוג הפולינומים f ו-$x-\alpha$. לפי המשפט על חילוק פולינומים, קיימים פולינומים $g(x),r(x)\in\mathbb{F}[x]$ שעבורם $f=(x-\alpha)g+r$, כאשר מתקיים $r\equiv 0$ (כלומר, מקבל ערך אפס תמיד) או $\deg(r)<\deg(x-\alpha)$. קל לראות כי התנאים האלו אומרים, למעשה, כי r הוא סקלר כלשהו מ-$\mathbb{F}$. נציב בשוויון הפולינומים $f=(x-\alpha)g+r$ את האיבר $x=\alpha$; אזי $f(\alpha)=0\cdot g(\alpha)+r$. אבל $f(\alpha)=0$, ולכן $0=0+r$, ומכאן $r=0$.
נקבל $f=(x-\alpha)g$.

□

הגדרה 2. פולינום $g(x)$ **מחלק** את הפולינום $f(x)$, אם קיים פולינום $h(x)$ שעבורו $f=gh$ בשוויון פולינומים. מסמנים $g|f$.

במשפט הקודם הוכחנו שאם α שורש של f, אזי $x-\alpha$ מחלק את הפולינום f.

2 הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי

בעת נחזור לתיאוריה של מטריצות ושל אופרטורים. ההגדרה הבאה תוגדר עבור אופרטורים, אך הגדרה זהה נכונה גם לגבי מטריצות, ולא נצטט אותה כאן:

הגדרה 3. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של אופרטור לינארי $T : V \to V$.
הריבוי האלגברי k של λ הוא החזקה הגדולה ביותר $(x-\lambda)^k$, כך שמתקיים $(x-\lambda)^k | p_T(x)$ (במילים, אם מפרקים את הפולינום האופייני לגורמים לינאריים, הריבוי האלגברי הוא החזקה של הגורם $x-\lambda$).

הריבוי הגיאומטרי m של λ הוא $m = \dim V_\lambda(T)$ (במילים, זהו המספר הגדול ביותר של וקטורים עצמיים הקשורים ל-λ שהם בלתי תלויים לינארית).

הערה 2. לכל $\lambda \in \mathbb{F}$,

1. $1 \le k_\lambda \le n$

הוכחה. (א) $1 \le k_\lambda$ כי λ שורש של הפולינום האופייני.

(ב) $k_\lambda \le n$ על פי השוואת דרגות.

□

2. $1 \le m_\lambda \le n$

הוכחה. (א) $1 \le m_\lambda$ כי λ ע"ע, ולכן קיים $0 \neq v \in V_\lambda(T)$.

(ב) $m_\lambda \le n$ כי $V_\lambda(T)$ תת-מרחב של V.

□

כעת ננסה להבין מה היחס בין הריבויים של ע"ע, האלגברי והגיאומטרי. הכוונה - האם הם שווים, ואם לא - מי גדול יותר.

משפט 2. *לכל $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של אופרטור לינארי $T : V \to V$, מתקיים* $1 \le m_\lambda \le k_\lambda \le n$.

הוכחה. נתבונן ב-$V_\lambda(T)$, ונסמן $m = m_\lambda = \dim V_\lambda(T)$. נבחר בסיס $\{v_1, \ldots, v_m\}$ של $V_\lambda(T)$. אם $m < n$, נשלים את הבסיס הזה לבסיס B של V: $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$. תהי $A = [T]_B$. מתקיים:

$$T(v_1) = \lambda v_1, \cdots, T(v_m) = \lambda v_m, T(v_m+1) = ?, \cdots, T(v_n) = ?$$

אם כן, המטריצה A הינה מהצורה

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & A_2 \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A_1 \end{array}\right)$$

נסתכל על הפולינום האופייני של T:

$$p_T(x) = p_A(x) = \det(xI - A) = \det\left(\begin{array}{ccc|c} x-\lambda & & 0 & \\ & \ddots & & -A_2 \\ 0 & & x-\lambda & \\ \hline & 0 & & xI - A_1 \end{array}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x-\lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x-\lambda \end{pmatrix} \det (xI - A) = (x-\lambda)^m g(x)$$

אם כן, $k_\lambda \geq m = m_\lambda$.

□

הערה 3. יש מקרים שבהם $m_\lambda < k_\lambda$. למשל - בלוק ז'ורדן; עבור $J_n(\lambda)$, ראינו כי $m_\lambda = 1$, אבל $k_\lambda = n$.

בהמשך ננסה להבין מתי לכל ע"ע הריבויים שווים, ונגלה כי הם שווים אם ורק אם המטריצה לכסינה.

3 וקטורים עצמיים הקשורים לערכים עצמיים שונים

נשאלת השאלה מה הקשר בין וקטורים עצמיים הקשורים לערכים עצמיים שונים. במילים אחרות, מה הקשר בין המרחבים העצמיים של מטריצה (או של אופרטור).

משפט 3. *ו"ע הקשורים לע"ע שונים הם בת"ל.*

הוכחה. יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ ע"ע שונים, ונסמן $v_1, \ldots, v_s$ הקשורים ל-$\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ בהתאמה. נוכיח $\{v_1, \ldots, v_s\}$ בת"ל. בשלילה, נניח ש-$\{v_1, \ldots, v_s\}$ ת"ל. אם כן, קיימת לה תת-קבוצה ת"ל מינימלית, נסמנה $\{v_1, \ldots, v_t\}$.

ניקח צירוף לינארי $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t = 0 \quad (1)$, כאשר קיים $1 \leq i \leq t$ שעבורו $\alpha_i \neq 0$. נפעיל את האופרטור T: $T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t) = T(0)$. אבל אלו וקטורים עצמיים, ולכן $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_t \lambda_t v_t = 0 \quad (\star)$.

נחזור ל-(1), ונכפול את המשוואה ב-λ_t: $\alpha_1 \lambda_t v_1 + \cdots + \alpha_t \lambda_t v_t = 0 \quad (\star\star)$.

נחסר $(\star) - (\star\star)$. נקבל את המשוואה $\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_t) v_1 + \cdots + \alpha_t (\lambda_{t-1} - \lambda_t) v_t = 0$.

כיוון ש-$t - 1 < t$, ותת-הקבוצה $\{v_1, \ldots, v_t\}$ היא הקטנה ביותר ות"ל, כל המקדמים בצירוף הלינארי מתאפסים, כלומר

$$\begin{cases} \alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_t) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{t-1} (\lambda_{t-1} - \lambda_t) = 0 \end{cases}$$

כל הע"ע שונים, לכן $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{t-1} = 0$. נציב ב-$(1)$, ונקבל $\alpha_t v_t = 0$. אבל $v_t \neq 0$, ולכן $\alpha_t = 0$.

לסיכום, קיבלנו שאם $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_t v_t = 0 \quad (1)$, אזי $\alpha_1 = \cdots = \alpha_t = 0$, בסתירה להיות הקבוצה ת"ל.

לכן $\{v_1, \ldots, v_s\}$ בת"ל, כדרוש.

□