כבר ראינו שקיבוץ איברים בטור זה בעייתי, אבל מה עם חוק החילוף?

דוגמה 1. נגדיר $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$, זה מוגדר משום שהטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ (לטורים מחליפי סימן). נוכיח בהמשך ש- $S = \ln 2$, אבל לעת עתה ברור ש- $S > 0$ משום שאפשר לקבץ את האיבר במקום ה- $2n+1$ עם האיבר במקום ה- $2n+2$ ולקבל הפרש של 2 שברים מהצורה $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+2}$ בכל מחובר וכל אחד מהם חיובי אז גם הטור חיובי. נסדר את איברי הטור בצורה שונה:

$$S = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2} S$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} S \Rightarrow S = 0$$

התקבלה סתירה! אם כך, מתי כן אפשר להחליף את איברי הטור בלי לשנות דבר?

הגדרה 1. נתון טור $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והעתקה $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל אז הטור $(A') \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ נקרא תמורה של A

משפט 1 (טענת עזר). *יהי $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $(A') \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ תמורה על A.*
אם $\forall n : a_n \geq 0$ ו-A מתכנס אז גם A' מתכנס.

הוכחה. A מתכנס ולכן $\exists C \forall n : \sum_{k=1}^{n} a_k \leq C$ בעת, ניקח את $N = \max\{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\}$ ונראה כי $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{N} an \leq C$ ולכן מתכנס.
באותה דרך מוכיחים ש- $A' = A$ $\square$

משפט 2. *יהי $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $(A') \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ תמורה על A . אם A מתכנס בהחלט אז גם A' מתכנס בהחלט ומתקיים $A = A'$*

הוכחה. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ כאשר a_n^+ הם האיברים החיוביים בטור ו- a_n^- הם הערך המוחלט של האיברים השליליים בטור. שני הטורים מתכנסים (מבחן השוואה ראשון עם הטור המקורי). בעת נסתכל על

$$\sum a_{\sigma(n))} = \sum a_{\sigma(n)}^+ - \sum a_{\sigma(n)}^-$$

אבל כל טור פה הוא תמורה של אחד הטורים שכתבנו רק לפני רגע ואלה טוריים חיוביים ולכן, לפי טענת העזר, הם שווים. המסקנה היא ש-

$$\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n$$

משפט 3 (משפט רימן). *יהי טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס על תנאי, אזי לכל $p \in \mathbb{R}$ וגם עבור $p = \pm\infty$ קיימת תמורה $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = p$*

הוכחה. נראה שאם הטור מתכנס בתנאי אז $\sum a_n^+, \sum a_n^- = \infty$ משום שאם שניהם היו מתכנסים אז הטור היה מתכנס בהחלט ואם רק אחד מהם היה מתכנס אז הטור היה מתבדר.
כמו כן $a_n \to 0$ (כי זה תנאי הכרחי להתכנסות).
בדי שהטור יתכנס ל- p ממשי, נחבר איברים חיוביים של הטור שוב ושוב עד שנגיע למספר שגדול מ- p, בשלב זה נחסר איברים מ- a_n^- שוב ושוב עד שנגיע למספר שקטן מ- p, בעת שוב נחזור לחבר ואז כשנעבור את p נתחיל לחסר... הטור שקיבלנו שואף ל-p (כי $a_n \to 0$ ומאיך שבנינו את הטור) והוא גם תמורה של הטור המקורי. ברור שזה חח"ע אבל מדוע זה על? פשוט מכך שמכל שלב בטור והלאה, אם רק נחבר a_n^+ או רק נחסר a_n^- נגיע לאינסוף או מינוס אינסוף בהתאמה. מה אם $p = \infty$? נחבר מספיק איברים מ- a_n^+ עד שנעבור את 10 ונחסר איבר מ- a_n^-, ואז נחבר מספיק איברים חיוביים עד שנעבור את ה-100 ושוב נחסר a_n^-, עכשיו נחבר שוב מספיק איברים עד שנעבור את 1000 וכו'... באופן דומה ל- $p = -\infty$ $\square$