

משפט 1. נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ שכל איבריו חיוביים. נניח שקיים $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אזי

1. אם $q < 1$ הטור מתכנס

2. אם $q > 1$ (אפשר גם אינסופי) הטור מתבדר

הוכחה. 1. $\exists n_0 \forall n \geq n_0 \frac{a_{n+1}}{a_n} < q'$ עבור $q < q' < 1$ ואז $a_{n+1} \leq q' a_n$. $\forall n \geq n_0$. מכאן ש-

$$a_{n+1} \leq a_n \cdot q' \leq a_{n-1} \cdot q'^2 \leq \dots \leq a_{n_0} \cdot q'^{n+1-n_0} = a_{n_0} q'^{1-n_0} \cdot q'^n$$

נסיק ש- $\sum_{n=1}^{\infty} q'^n$. $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq a_{n_0} q'^{1-n_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q'^n$ אבל זהו טור הנדסי שמתכנס, ולכן, ממבחן השוואה הראשון, נקבל את הדרוש.

2. מוכיחים את זה באופן אנלוגי ל-1 רק שצריך לקחת $1 < q' < q$ ואי השיויונים מתהפכים.

□

דוגמה 1. אם $q = 1$ אי אפשר לדעת, לדוגמה אם ניקח את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ אז בכל מקרה נקבל $q = 1$ אבל עבור p שונים נקבל התכנסות/התבדרות