1.0 מהו טור

הגדרה 1. תהי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר את הסדרה $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר להיות $\lim_{k\to\infty} s_k$. במקרה כזה, s_k נקראת סדרת הסכומים החלקיים של הטור (או בקיצור הסס"ח). אם הגבול הזה קיים אומרים שהטור מתכנס, ואחרת אומרים שהוא מתבדר.

דוגמה 1. דוגמה: הצגה עשרונית - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ כש- $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. זה מתכנס משום שהסס"ח היא סדרת קושי.

2.0 תבונות בסיסיות של טורים

משפט 1. *נניח הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים אזי*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

הוכחה. ישירות מאריתמטיקה של גבולות □

משפט 2 (מבחן קושי). *הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{n>m>N} : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

הוכחה. בעצם התנאי בצד שמאל זה פשוט ההגדרה ש- s_n סדרת קושי, ובידוע סדרה היא מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי. □

משפט 3. *אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (המשפט ההפוך לא נכון! ראינו שהטור ההרמוני מתבדר למרות שהאיבר הכללי שואף ל-0)*

הוכחה. נראה כי $a_n = s_n - s_{n-1}$ ואז מאריתמטיקה של גבולות, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ □

דוגמה 2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}+1}{2n+3}$ מתבדר כי האיבר הכללי שואף לחצי

3.0 טורים עם איברים חיוביים

משפט 4. *$\forall n : a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה מלעיל, כלומר $\exists C \forall n : s_n \leq C$*

הוכחה. נשים לב שהסס"ח היא סדרה מונוטונית עולה במקרה שבל איברי הטור חיוביים ולכן מתכנסת ל- sup שלה. אם היא חסומה מלעיל אז הסופרימום ממשי ואז הטור מתכנס, בעוד שאם היא לא חסומה זה אומר ששואפת לאינסוף ולכן הטור מתבדר. □