למה 1 (למת קנטור)**.** *נתונה סדרה של קטעים סגורים* $[a_n,b_n]$ *כך ש-* $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$*. אם מתקיים* $|b_n-a_n| \to 0$ *אזי* $\exists c : \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$

הוכחה. נראה כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה בעוד ש- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונו' יורדת.
בנוסף, $a_n \le b_1, b_n \ge a_1$ ולכן הסדרות האלה הן מונוטוניות וחסומות אז מתכנסות.
נגדיר $\sup a_n = a, \sup b_n = b$ ואז אנו יודעים ש- $a_n \to a, b_n \to b$. אבל מאריתמטיקה של גבולות כיוון ש- $b_n - a_n \to 0$ אז $b-a=0 \Rightarrow b=a$. נגדיר $c := b = a$ ונוכיח ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$
$\boxed{\supseteq}$

$$a_n \le a = c = b \le b_n \Rightarrow \forall n : c \in [a_n,b_n] \Rightarrow c \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$$

$\boxed{\subseteq}$

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] \Rightarrow \forall x : x \in [a_n,b_n] \Rightarrow \forall n a_n \le x \land x \le b_n$$

מהגדרת אינפימום וסופרימום נקבל ש-

$$a \le x \land x \le b \Rightarrow a = x = b \Rightarrow x = c$$

□