הגדרה 1. אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי (Cauchy sequence) אם מתקיים התנאי:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N} : |x_n - x_m| < \epsilon$$

כלומר המרחק בין איברי הסדרה קטן באופן כזה שמאיזהשהו מקום בסדרה והלאה, מרחק בין 2 איברים (שיכולים להיות במקומות רחוקים כרצוננו אחד מהשני בסדרה) יהיה קטן כרצוננו.

משפט 1. *בכל תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אם סדרה שמורכבת מאיברי הקבוצה מתכנסת אז היא סדרת קושי (בפרט זה נכון לכל סדרה ב- $\mathbb{R}$).*

הוכחה. יהי אפסילון גדול מ-0, אזי $\exists_N\forall_{n>N}|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. לכן מתקיים:
$\forall_{n,m>N} : |x_n - x_m| = |(x_n - L) + (L - x_m)| \leq |x_n - L| + |L - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
□

הגדרה 2. $A \subseteq \mathbb{R}$ נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי המורכבת מאיבריו מתכנסת לאיבר בתוכו.

דוגמה 1. $\mathbb{Q}$ לא שלם, כיוון שאם ניקח את

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots \to \pi \notin \mathbb{Q}$$

זוהי סדרה שמתכנסת ב- $\mathbb{R}$ ולכן, מהמשפט הקודם, היא סדרת קושי. אבל היא סדרת קושי שמורכבת מאיברים רציונאליים ולא מתכנסת למספר רציונאלי, ולכן קבוצת המספרים הרציונאליים לא מהווה מרחב שלם.

מסקנה 2. *בכל מרחב שלם, סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.*

הוכחה. מימין לשמאל זה נכון באופן כללי מהמשפט הקודם (סדרה מתכנסת היא תמיד סדרת קושי) ומשמאל לימין נובע מההגדרה של מרחב שלם, שדורש שכל סדרת קושי תתכנס למשהו בתוכו, ובפרט תתכנס. □

משפט 3. *$\mathbb{R}$ שלם*

הוכחה. נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, אזי לכל אפסילון חיובי

$$\exists_N\forall_{n,m>N}|x_n - x_m| < \epsilon$$

ואז $x_m - \epsilon < x_n < x_m + \epsilon$ וזה נכון לכל $n > N$ ולכן

$$x_m - \epsilon \leq l_{N+1} \leq L_{N+1} \leq x_m + \epsilon$$

מהעברת אגפים מקבלים ש- $0 \leq L_{N+1} - l_{N+1} \leq 2\epsilon$. אם ניקח לכן סדרת אפסילונים ששואפת ל-0 ובהתאם אליהם ניקח את ה- Nים המתאימים וממשפט הסנדוויץ' נקבל שהגבול העליון והתחתון שווים, ואז לפי משפט הסדרה מתכנסת אליהם. □

דוגמה 2. נסתכל על

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

נראה כי המרחק בין איברים עוקבים בסדרה הולך ושואף ל-0: $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} \to 0$, אף על פי כן, הסדרה לא תתכנס. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, ולכן אם נראה שהסדרה הזאת לא סדרת קושי, אז בהכרח היא לא מתכנסת. אכן, נראה כי

$$x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

כלומר אין מקום בו משם והלאה המרחק בין כל 2 איברים קטן מחצי, ולכן זו לא סדרת קושי.

מסקנה 4. *הטור ההרמוני, שמוגדר להיות* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *שווה לאינסוף.*

הסבר: הסדרה הזאת היא מונוטונית עולה ולכן מתכנסת ל- $\sup x_n$ אבל אם זה היה מספר ממשי היינו מקבלים סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת, בסתירה למה שהרגע הוכחנו. לכן בהכרח $\sup x_n = \infty$ ולשם הסדרה שואפת.