1.0 תתי סדרות

הגדרה 1. תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית אז הצמצום של הסדרה $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ אל הקבוצה A נקראת תת סדרה של x_n. עוד דרך להסתבל על זה היא לקחת סדרה חד חד ערכית של טבעיים שמונוטונית עולה, n_k (לדוגמה $n(k) = 2k$ היא סדרת הזוגיים $2, 4, 6, \cdots$) ואז להסתבל על $f(n(k))$ או x_{n_k}.

דוגמה 1. נסתכל על הסדרה $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$ נסתכל על הסדרה שנמצאת במקומות הזוגיים, כלומר ניקח את $A = \mathbb{N}_{\text{even}}$ ואז $n(k) = 2k$ ו- x_{n_k} נראית ככה: $0, 0, 0, 0, \cdots$. הסדרה המקורי לא מתכנסת, אבל תת הסדרה הזאת כן מתכנסת, ל-0. זה הרעיון של גבול חלקי.

2.0 גבולות חלקיים

הגדרה 2. $l \in \mathbb{R}$ נקרא גבול חלקי של סדרה אם קיימת תת סדרה שלה שמתכנסת ל- l

משפט 1. *אם $x_n \to L$ אז כל תת סדרה שלה מתכנסת ל-L.*

הוכחה. תהי תת סדרה x_{n_k} ויהי אפסילון גדול מ-0. עפ"י הנתון $\exists n_0 \forall n > n_0 |x_n - L| < \epsilon$. ידוע ש- n_k סדרה חח"ע מונוטונית עולה של טבעיים, ולכן היא לא חסומה וקיים k_0 כך ש- $\forall k > k_0 : n_{k_0} > n_0$. מכאן ש- $\forall k > k_0 : |x_{n_k} - L| < \varepsilon$ ☐

משפט 2. *תהי סדרה שכל תת סדרה שלה מתכנסת ל- L, אזי $x_n \to L$.*

הוכחה. נניח בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל- L, אזי $\exists_{\epsilon>0} \forall_N \exists_{n>N} : |x_n - L| \geq \epsilon$. אם כך, נבנה תת סדרה x_{n_k} באופן הבא: לכל N קיים $n > N$ שעבורו $|x_n - L| \geq \epsilon$ ולכן ניקח את אותם nים עבור $N = 1, 2, 3, \cdots$ ואלה יהיו ה- n_k. באופן הזה נקבל תת סדרה שהמרחק בין איבר בה ל-L גדול או שווה לאפסילון אבל זה סותר את הנתון שכל תתי הסדרות שואפות ל- L. ☐

3.0 קשר בין גבולות חלקיים לגבול עליון ותחתון

משפט 3. *כל גבול חלקי של סדרה הוא בין הגבול התחתון שלה לגבול העליון שלה.*

הוכחה. יהי l גבול חלקי אז קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to l$. מתקיים ש- $l_{n_k} \leq x_{n_k} \leq L_{n_k}$ וממשפט הסנדוויץ' נקבל את הדרוש. ☐

משפט 4. *הגבול העליון והתחתון הם גבולות חלקיים*

הוכחה. $L_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ ואז לכל k מתקיים $\exists_{n_k} : L_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} < L_k$ ואז קיימת תת סדרה מונוטונית שלפי משפט הסנדוויץ' מתכנסת לגבול העליון. עבור הגבול התחתון באופן אנלוגי. ☐

4.0 משפט בולצאנו ווירשטראס

משפט 5. *לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת*

הוכחה. $-M \Rightarrow x_n \leq M \Rightarrow -M \leq l_n \leq M$ ואז l_n מונו' עולה וחסומה ומכאן שמתכנסת, אז הגבול התחתון קיים, והוא גבול חלקי, ולכן יש תת סדרה מתכנסת. ☐