תהי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר 2 סדרות חדשות: $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\}, l_n =$ $\inf\{x_k : k \geq n\}$. ברור ש- $l_n \leq L_n$.

תזכורת: $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

מהתזכורת הזאת נשים לב ש- L_n מונו' (מונוטונית) יורדת ו- L_n מונו' עולה. זאת משום ש- $\{x_k : k \geq n\} \subseteq \{x_k : k \geq n+1\}$ ולכן $l_n \leq l_{n+1} \leq L_{n+1} \leq L_n$

הגבול העליון של x_n, שמסומן באופן הבא: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ מוגדר להיות $\lim_{n\to\infty} L_n$.

באותו אופן, הגבול התחתון הוא $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} l_n$.

משפט 1. *תהי סדרה חסומה x_n אזי*
הגבול העליון והתחתון זהים אם ורק אם הסדרה x_n מתכנסת (ואז תתכנס לגבול העליון/תחתון)

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נראה ש- $l_n \leq x_n \leq L_n$ אבל הקצוות מתכנסים לאותו מספר L ולכן, ממשפט הסנדוויץ', $x_n \to L$

$\boxed{\Rightarrow}$ יהי $\varepsilon > 0$. אנו יודעים ש- $\exists N \forall n > N : x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ואז לפי ההגדרה $\forall n > N : L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$. לכן גם

$$\forall n > N : L - \varepsilon \leq l_n \leq L_n \leq L + \varepsilon$$

ובעצם קיבלנו ש- $\exists N \forall n > N : |L_n - L|, |l_n - L| < \varepsilon$ $\square$