

**משפט 1** (משפט הסנדוויץ'). תהיינה הסדרות  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  כך ש- $\forall n$ :  $a_n \leq x_n \leq b_n$  ובנוסף  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  אזי הסדרה  $x_n$  מתכנסת והגבול שלה הוא  $L$ .

(שם המשפט נובע מכך שהסדרה האמצעית היא באמצע של מעין סנדוויץ' שיוצרות הסדרות  $a_n, b_n$  ששואפות לאותו גבול. פרופסור מארק אגרנובסקי מספר שברוסיה נהוג לקרוא למשפט הזה המשפט על שיכור 1-2 שוטרם משום שהסדרות  $a_n, b_n$  הן כמו שוטרם שהולכים למקום מסוים  $L$  וגורמים שיכור שהולך ביניהם  $x_n$  ללכת איתם לאותו מקום)

הוכחה. אם  $L = \infty$  אז פשוט עבור  $M > 0$  ידוע שיש  $n_0$  שמתקיים עבורו  $\forall n > n_0, a_n > M$  ואז גם  $x_n \geq a_n > M$ . באותו אופן אם  $L = -\infty$  אז נעשה אותו דבר רק עם העובדה ש- $x_n \leq b_n \leq M$ .  
אם  $L \in \mathbb{R}$ , יהי  $\varepsilon > 0$  ידוע אז ש-

$$\exists n_1 \forall n > n_1 : L - \varepsilon < a_n, \exists n_2 \forall n > n_2 : b_n < L + \varepsilon$$

ואז עבור  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  מתקיים ש- $\forall n > n_0 : L - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < L + \varepsilon$  ומכאן, ש- $|x_n - L| < \varepsilon$  ואז לפי ההגדרה,  $x_n \rightarrow L$ .  
□