1 הפולינום האופייני

הגדרה 1. תהי A מטריצה ריבועית מגודל $n\times n$. $p_A(x)=\det(xI_n-A))$ נקרא **הפולינום האופייני** של המטריצה A.

חשוב לשים לב שזהו פולינום; האיברים במטריצה xI_n-A הם פולינומים לכל היותר ממעלה 1. דטרמיננטה היא, בסך הכל, סכום של מכפלות של איברים מתוך המטריצה. לכן, גם התוצאה היא פולינום.

פולינום זה אמור להיות מוכר; כאשר דיברנו על ערכים עצמיים ועל וקטורים עצמיים, הוא היה חלק מהאלגוריתם למציאת ערכים עצמיים.

משפט 1 (תכונות הפולינום האופייני)**.** *לפולינום האופייני התכונות הבאות:*

1. *השורשים של* $p_A(x)$ *הם הע"ע של* A.
2. *אם* A *מטריצה משולשת,*
$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \star\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$
אזי $p_A(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$.
3. $p_A(x)$ *הוא פולינום מתוקן. זאת אומרת, המקדם הראשי / המוביל שלו שווה ל-*1.
4. $\deg(p_A(x))=n$.
5. *אם* $p_A(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$*, אזי* $a_0=(-1)^n\cdot\det(A)$ *וגם* $a_{n-1}=-tr(A)$.

הוכחה. **1** לפי טענה שראינו בהרצאה הראשונה.

2 המטריצה
$$xI-A=\begin{pmatrix}x-\lambda_1 & & \star\\ & \ddots & \\ 0 & & x-\lambda_n\end{pmatrix}$$
גם היא משולשת, ולכן הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון. אם כן,
$$p_A(x)=\det(xI-A)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$$

3,4,5
$$p_A(x)=\det(xI_n-A)=\det\begin{pmatrix}x-a_{11} & \cdots & -a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn}\end{pmatrix}=$$
$$=\sum_{\sigma\in S_n}sgn(\sigma)\,c_{1\sigma(1)}\dots c_{n\sigma(n)}=x^n+x^{n-1}(-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{nn})+\cdots+a_0$$
מהפיתוח הנ"ל, סעיפים 3 ו-4 נובעים באופן מיידי. נותר להוכיח את סעיף 5:
$$a_0=p_A(0)=\det(0I_n-A)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$$
□