1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה 1. תהי $A\in M_n\left(\mathbb{F}\right)$. אומרים ש-$\lambda\in\mathbb{F}$ הוא **ערך עצמי (ע"ע)** של A, אם קיים וקטור $0\neq v\in\mathbb{F}^n$ שעבורו $Av=\lambda v$.
הוקטור v נקרא **וקטור עצמי (ו"ע)** של A הקשור ל-λ.

הגדרה 2. אוסף כל הערכים העצמיים של A נקרא **הספקטרום** של A, ומסומן $\text{spec}\left(A\right)$.

הערה 1. יכול להיות המצב $spec(A)=\emptyset$.

הרעיון בערכים עצמיים ווקטורים עצמיים הוא לדעת אילו וקטורים המטריצה מותחת או מכווצת. הווקטור העצמי – מי ההעתקה מותחת או מכווצת, והערך העצמי – פי כמה. בהמשך נראה שלערכים העצמיים ולווקטורים העצמיים יש תפקיד משמעותי ב"הבנת" מטריצות.

משפט 1. *$\lambda=0$ ערך עצמי של A אם ורק אם A איננה הפיכה.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח $\lambda=0$ הוא ע"ע של A. זאת אומרת שקיים וקטור $0\neq v$ שעבורו $Av=0$. נסמן

$$v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

נוכל להגיד שלפיכך

$$\begin{cases}a_{11}v_1+\cdots+a_{1n}v_n=0\\ \vdots\\ a_{n1}v_1+\cdots+a_{nn}v_n=0\end{cases}$$

היא מערכת הומוגנית (בת n משוואות מ-n נעלמים). למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, ולכן A אינה הפיכה.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-A הפיכה. נתבונן במערכת $Av=0$. יש לה פתרון לא טריוויאלי $v\neq0$, ולכן מתקיים $Av=0=0\cdot v$, זאת אומרת ש-$\lambda=0$ הוא ע"ע של A.

$\square$

הערה 2. A איננה הפיכה אם ורק אם $\det\left(A\right)=0$.

משפט 2. *$\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של מטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ אם ורק אם $\det\left(\lambda I-A\right)=0$.*

הוכחה. $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ע"ע של A $\Leftrightarrow$ קיים $v\neq0$ כך ש-$Av=\lambda v$ $\Leftrightarrow$ קיים $v\neq0$ כך ש-$\lambda v-Av=0$ $\Leftrightarrow$ קיים $v\neq0$ כך ש-$\left(\lambda I-A\right)v=0$ $\Leftrightarrow$ המטריצה $\lambda I-A$ אינה הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I-A)=0$.

$\square$

המשפט מאפשר לנו לחשב ערכים עצמיים מבלי לנסות לכפול וקטורים במטריצה בתקווה ש"ייצא טוב". לפי המשפט, כדי למצוא ערכים עצמיים של המטריצה נוכל לפתור את המשוואה $\det\left(\lambda I-A\right)=0$. זהו פולינום ממעלה n, ובהמשך נקרא לו "הפולינום האופייני" של A, והוא ישחק תפקיד חשוב בתיאוריה שלנו.
נציג כעת מספר דוגמאות למציאת ערכים עצמיים.

דוגמה 1 (מטריצת היחידה). ניקח $A=I_n$, ונחפש את $\text{spec}\left(A\right)$. נבדוק בשתי שיטות:

שיטה ראשונה – חישוב ישיר נניח ש-$I_n v = \lambda v$. מכאן, $v = \lambda v$, כלומר $\lambda = 1$, כלומר $\text{spec}\left(I_n\right) = \{1\}$.

שיטה שנייה – לפי המשפט נשים לב כי

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

לכן, $\det\left(\lambda I - A\right) = \left(\lambda - 1\right)^n$ אם כן, $\left(\lambda - 1\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, ולכן $\text{spec}\left(I_n\right) = \{1\}$.

לסיכום, הערך העצמי של מטריצת היחידה הוא 1, ומהחישוב שבחלק הראשון גילינו שכל הווקטורים הם וקטורים עצמיים שלו. זה אכן מתאים לדברים המוכרים – כל וקטור הכופלים במטריצת היחידה נשאר עצמו, המתיחה היא תמיד פי 1.

דוגמה 2 (מטריצה אלכסונית כללית). נסמן

$$A = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

נרצה לדעת מהו $\text{spec}\left(D\right)$. על פי המשפט, נסתכל על $\lambda I - D$:

$$\lambda I - D = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה: $\det\left(\lambda I - A\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - \alpha_i\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

קיבלנו ש-$\text{spec}\left(D\right) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

אכן, גם את התוצאה הזו יכולנו לצפות מראש! מטריצה אלכסונית מותחת בדיוק את וקטורי היחידה, $e_1, \ldots, e_n$ פי $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בהתאמה.

דוגמה 3 (מטריצה משולשת עליונה). ניקח

$$A = T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשת עליונה.

על פי הוכחה דומה לזו של מטריצה אלכסונית – מקבלים $\text{spec}\left(T\right) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

דוגמה 4. ניקח מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

לפי חישוב, $\det\left(\lambda I - A\right) = \lambda^2 + 1 = 0$, אבל למשוואה זו אין פתרונות ב-$\mathbb{R}$.

אם כן, $\text{spec}\left(A\right) = \emptyset$.

2 מרחבים עצמיים

הגדרה 3. תהי A מטריצה ריבועית, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A. נגדיר

$$V_\lambda\left(A\right) = \left\{v \in \mathbb{F}^n \mid Av = \lambda v\right\}$$

$V_\lambda\left(A\right)$ נקרא **המרחב העצמי** של A הקשור ל-λ.

בעצם, זוהי קבוצת כל הווקטורים העצמיים של A הקשורים ל-λ, ביחד עם וקטור האפס.

הערה 3. $V_\lambda\left(A\right)$ הוא תת-מרחב וקטורי של $V = \mathbb{F}^n$.

הוכחה. $0 \in V_\lambda\left(A\right)$ - טריוויאלי, מכיוון ש-$A \cdot 0 = 0 = \lambda \cdot 0$.
כמו כן, אם $v_1, v_2 \in V_\lambda\left(A\right)$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, מתקיים

$$A\left(\alpha v_1 + \beta v_2\right) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2 = \lambda\left(\alpha v_1 + \beta v_2\right)$$

ומכאן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda\left(A\right)$.

□

3 מציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

הערה 4 (אלגוריתם למציאת וקטורים עצמיים). נניח שנתונה $A \in M_n\left(\mathbb{F}\right)$.

1. מוצאים ערכים עצמיים על ידי פתרון המשוואה $\det\left(x \cdot I - A\right) = 0$.
2. לכל ערך עצמי λ מוצאים בסיס למרחב העצמי על ידי מציאת בסיס למרחב האפס $N\left(\lambda \cdot I - A\right)$.