1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה 1. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אומרים ש-$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא **ערך עצמי (ע"ע)** של A, אם קיים וקטור $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ שעבורו $Av = \lambda v$.

הוקטור v נקרא **וקטור עצמי (ו"ע)** של A הקשור ל-λ.

הגדרה 2. אוסף כל הערכים העצמיים של A נקרא **הספקטרום** של A, ומסומן $\text{spec}(A)$.

הערה 1. יכול להיות המצב $spec(A) = \emptyset$.

הרעיון בערכים עצמיים ווקטורים עצמיים הוא לדעת אילו וקטורים המטריצה מותחת או מכווצת. הווקטור העצמי - מי ההעתקה מותחת או מכווצת, והערך העצמי - פי כמה. בהמשך נראה שלערכים העצמיים ולווקטורים העצמיים יש תפקיד משמעותי ב"הבנת" מטריצות.

משפט 1. *$\lambda = 0$ ערך עצמי של A אם ורק אם A איננה הפיכה.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח $\lambda = 0$ הוא ע"ע של A. זאת אומרת שקיים וקטור $0 \neq v$ שעבורו $Av = 0$. נסמן

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נוכל להגיד שלפיכך

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n = 0 \end{cases}$$

היא מערכת הומוגנית (בת n משוואות מ-n נעלמים). למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, ולכן A אינה הפיכה.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-A הפיכה. נתבונן במערכת $Av = 0$. יש לה פתרון לא טריוויאלי $v \neq 0$, ולכן מתקיים $Av = 0 = 0 \cdot v$, זאת אומרת ש-$\lambda = 0$ הוא ע"ע של A.

$\square$

הערה 2. A איננה הפיכה אם ורק אם $\det(A) = 0$.

משפט 2. *$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ אם ורק אם* $\det(\lambda I - A) = 0$.

הוכחה. $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ע"ע של A $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$Av = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$\lambda v - Av = 0$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$(\lambda I - A)v = 0$ $\Leftrightarrow$ המטריצה $\lambda I - A$ אינה הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$.

$\square$

המשפט מאפשר לנו לחשב ערכים עצמיים מבלי לנסות לכפול וקטורים במטריצה בתקווה ש"ייצא טוב". לפי המשפט, כדי למצוא ערכים עצמיים של המטריצה נוכל לפתור את המשוואה $\det(\lambda I - A) = 0$. זהו פולינום ממעלה n, ובהמשך נקרא לו "הפולינום האופייני" של A, והוא ישחק תפקיד חשוב בתיאוריה שלנו.

נציג כעת מספר דוגמאות למציאת ערכים עצמיים.

דוגמה 1 (מטריצת היחידה). ניקח $A = I_n$, ונחפש את $\text{spec}(A)$. נבדוק בשתי שיטות:

שיטה ראשונה – חישוב ישיר נניח ש-$I_n v = \lambda v$. מכאן, $v = \lambda v$, כלומר $\lambda = 1$, כלומר $\text{spec}\left(I_n\right) = \{1\}$.

שיטה שנייה – לפי המשפט נשים לב כי

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

לכן, $\det\left(\lambda I - A\right) = \left(\lambda - 1\right)^n$ אם כן, $\left(\lambda - 1\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, ולכן $\text{spec}\left(I_n\right) = \{1\}$.

לסיכום, הערך העצמי של מטריצת היחידה הוא 1, ומהחישוב שבחלק הראשון גילינו שכל הווקטורים הם וקטורים עצמיים שלו. זה אכן מתאים לדברים המוכרים – כל וקטור הכופלים במטריצת היחידה נשאר עצמו, המתיחה היא תמיד פי 1.

דוגמה 2 (מטריצה אלכסונית כללית). נסמן

$$A = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

נרצה לדעת מהו $\text{spec}\left(D\right)$. על פי המשפט, נסתכל על $\lambda I - D$:

$$\lambda I - D = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה: $\det\left(\lambda I - A\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - \alpha_i\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

קיבלנו ש-$\text{spec}\left(D\right) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

אכן, גם את התוצאה הזו יכולנו לצפות מראש! מטריצה אלכסונית מותחת בדיוק את וקטורי היחידה, $e_1, \ldots, e_n$ פי $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בהתאמה.

דוגמה 3 (מטריצה משולשת עליונה). ניקח

$$A = T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשת עליונה.

על פי הוכחה דומה לזו של מטריצה אלכסונית – מקבלים $\text{spec}\left(T\right) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

דוגמה 4. ניקח מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

לפי חישוב, $\det\left(\lambda I - A\right) = \lambda^2 + 1 = 0$, אבל למשוואה זו אין פתרונות ב-$\mathbb{R}$.

אם כן, $\text{spec}\left(A\right) = \emptyset$.

2 מרחבים עצמיים

הגדרה 3. תהי A מטריצה ריבועית, ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של A. נגדיר

$$V_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{F}^n \mid Av = \lambda v\}$$

$V_\lambda(A)$ נקרא **המרחב העצמי** של A הקשור ל-λ.

בעצם, זוהי קבוצת כל הווקטורים העצמיים של A הקשורים ל-λ, ביחד עם וקטור האפס.

הערה 3. $V_\lambda(A)$ הוא תת-מרחב וקטורי של $V = \mathbb{F}^n$.

הוכחה. $0 \in V_\lambda(A)$ - טריוויאלי, מכיוון ש-$A \cdot 0 = 0 = \lambda \cdot 0$.

כמו כן, אם $v_1, v_2 \in V_\lambda(A)$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, מתקיים

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha A v_1 + \beta A v_2 = \alpha\lambda v_1 + \beta\lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

ומכאן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda(A)$.

□

3 הפולינום האופייני

הגדרה 4. תהי A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$. $p_A(x) = \det(xI_n - A))$ נקרא **הפולינום האופייני** של המטריצה A.

חשוב לשים לב שזהו פולינום; האיברים במטריצה $xI_n - A$ הם פולינומים לכל היותר ממעלה 1. דטרמיננטה היא, בסך הכל, סכום של מכפלות של איברים מתוך המטריצה. לכן, גם התוצאה היא פולינום.

פולינום זה אמור להיות מוכר; כאשר דיברנו על ערכים עצמיים ועל וקטורים עצמיים, הוא היה חלק מהאלגוריתם למציאת ערכים עצמיים.

משפט 3 (תבונות הפולינום האופייני). *לפולינום האופייני התכונות הבאות:*

1. *השורשים של $p_A(x)$ הם הע"ע של A.*
2. *אם A מטריצה משולשת,*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

אזי $p_A(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

3. *$p_A(x)$ הוא פולינום מתוקן. זאת אומרת, המקדם הראשי / המוביל שלו שווה ל-1.*
4. *$\deg(p_A(x)) = n$.*
5. *אם $p_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, אזי $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$ וגם $a_{n-1} = -tr(A)$.*

הוכחה. **1** לפי טענה שראינו בהרצאה הראשונה.

2 המטריצה

$$xI-A=\begin{pmatrix}x-\lambda_1 & & \star\\ & \ddots & \\ 0 & & x-\lambda_n\end{pmatrix}$$

גם היא משולשת, ולכן הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון. אם כן,

$$p_A(x)=\det(xI-A)=\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$$

3,4,5

$$p_A(x)=\det(xI_n-A)=\det\begin{pmatrix}x-a_{11} & \cdots & -a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}sgn(\sigma)\,c_{1\sigma(1)}\ldots c_{n\sigma(n)}=x^n+x^{n-1}(-a_{11}-a_{22}-\cdots-a_{nn})+\cdots+a_0$$

מהפיתוח הנ"ל, סעיפים 3 ו-4 נובעים באופן מיידי. נותר להוכיח את סעיף 5:

$$a_0=p_A(0)=\det(0I_n-A)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)$$

□