1 טורים כלליים

1.1 התכנסות בהחלט

הגדרה 1. אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

משפט 1. *טור מתכנס בהחלט הוא מתכנס.*

הוכחה. נוכיח עם קריטריון קושי. יהי אפסילון גדול מ-0, אז אנחנו יודעים ש-

$$\exists_N \forall_{n>m>N} \left| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \right| < \epsilon$$

אם כך, $|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k|$ פשוט מאי שיוויון המשולש, וכיוון שכל האיברים בסכום חיוביים זה בדיוק שווה ל- $|\sum_{k=m}^{n} |a_k||$ שקטן מאפסילון. אם קח, ניקח את ה- N שאנחנו מחפשים כדי להוכיח שזה סדרת קושי פשוט להיות אותו N וסיימנו! $\square$

דוגמה 1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{n^2}$ מתכנס משום ש- $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{\sin 2^n}{n^2}| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ וממבחן ההשוואה הראשון, הטור מתכנס בהחלט, לכן מתכנס.

2.1 התכנסות בתנאי

הגדרה 2. אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט.

דוגמה 2. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ מתכנס בתנאי (ראינו שלא מתכנס בהחלט כי טור הערכים המוחלטים זה הטור ההרמוני, למה הוא מתכנס נראה עוד מעט).

3.1 מבחן לייבניץ להתכנסות טורים

משפט 2. *יהי $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} c_n$ כאשר c_n חיובית ויורדת מונוטונית ל-0 אזי הטור מתכנס.*

הוכחה. נסתכל על הסס"ח S_n. מתקיים ש- $S_{2m+2} = S_{2m} + c_{2m+1} - c_{2m+2}$ ומשום ש- $c_n \searrow 0$ נקבל ש- $S_{2m+2} \geq S_{2m}$ ומכאן ש- S_{2n} סדרה מונו' עולה. בנוסף לכל n מתקיים ש-

$$S_{2n} = c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots - s = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} \leq c_1$$

כי כל אחד מהאיברים בסוגריים הוא אי שלילי (הסדרה c_n מונו' יורדת). מכאן ש- S_{2n} מונו' עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת. באותו אופן אפשר להראות על האי זוגיים שהם מתכנסים לאותו גבול. כיוון ש- $a_n \to L \Leftrightarrow a_{2n} \to L \wedge a_{2n-1} \to L$, הטור מתכנס. $\square$

דוגמה 3. הטור $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$ מתכנס לפי מבחן לייבניץ (הטור הזה נקרא טור לייבניץ) אבל לא מתכנס בהחלט משום שטור הערכים המוחלטים של הסדרה המתאימה זהו הטור ההרמוני.

4.1 מבחן דיריכלה להתכנסות טורים

משפט 3. *יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ונניח ש-*
א. הסס'ח של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ חסומה.
ב. $a_n \searrow 0$ (יורדת מונוטונית ל-0)
אזי הטור מתכנס

הערה 1. המשפט הזה מכליל את מבחן לייבניץ, שם האיברים הם מהצורה $(-1)^n c_n$ כש- c_n יורדת מונו' ל-0 וקל לראות שהסס"ח של $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ חסומה.

הוכחה. באמצעות קריטריון קושי
נסמן את הסס"ח של $\sum b_n$ בתור B_n (מתקיים ש- $B_n - B_{n-1} = b_n$).
נסמן את הסס"ח של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ב- S_n ואז מתקיים ש-

$$S_n = a_{n+1} B_n + \sum_{k=0}^{n} B_k (a_k - a_{k+1})$$

(סכום טלסקופי). כיוון ש- B_n חסומה ו- a_{n+1} שואפת ל-0 , כל הביטוי השמאלי שואף ל-0. מצד שני, a_n מונוטונית יורדת ולכן $a_k - a_{k+1} \geq 0$ ומותר להשתמש במבחן ההשוואה הראשון:
$\sum_{k=0}^{n} |B_k(a_k - a_{k+1})| \leq M \sum_{k=0}^{n} a_k - a_{k+1}$ וזהו טור טלסקופי ששואף ל- Ma_0 ולכן מתכנס. ממבחן ההשוואה נקבל שהחלק הימני של המשוואה של S_n מתכנס גם הוא ולכן הטור מתכנס. □

5.1 מבחן אבל להתכנסות טורים

משפט 4. *יהי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ונניח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ו- b_n מונוטונית וחסומה, אזי הטור מתכנס.*

הוכחה. b_n מונו' וחסומה ולכן מתכנסת לגבול L. נניח בה"כ ש- b_n מונוטונית יורדת (ואם היא עולה נעשה באופן דומה) ואז מתקיים

$$\sum a_n b_n = \sum a_n (b_n - L + L) = \sum a_n (b_n - L) + L \sum a_n$$

הטור הראשון מתכנס לפי דיריכלה והשני נתון שהוא מתכנס, אז הטור הוא סכום של מתכנסים ולכן מתכנס. □

2 פעולות בין איברי הטור

1.2 קיבוץ איברים בטור

אנחנו רגילים מחיי היום יום שחוק הקיבוץ עובד לחיבור: $(a+b)+c = a+(b+c)$. האם זה ככה בטורים?
נסתכל על

$$1-1+1-1+1-1+\cdots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0$$

אפשר גם להגיד ש-

$$1-1+1-1+1-1+1-\dots = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\dots = 1-0-0-0-\dots = 1$$

לסיכום, אי אפשר באופן כללי, אבל מתי כן?

משפט 5. *אם טור מתכנס, אפשר להשתמש בחוק הקיבוץ. יותר פורמלית, אם נגדיר n_k סדרה מונוטונית עולה של טבעיים אז הטור $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots a_{n_2}) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{p=n_{k-1}+1}^{n_k} a_p)$ מתכנס לאותו מספר כמו הטור המקורי.*

הוכחה. לשם ההוכחה נסמן את הסס"ח של הטור המקורי בתור A_n והסס"ח של הטור "החדש" בתור $\tilde{A_n}$. סדרת הסכומים החלקיים במקרה הזה תהיה פשוט

$$\tilde{A_m} = \sum_{p=1}^{n_m} a_p = A_{n_m}$$

וכיוון ש- $A_{n_m} \to S$ בתור תת סדרה של A_n שמתכנסת אז גם $A_m \to S$. □

<u>תרגיל בית:</u> יהי הטור $\sum a_n$ ונתון ש- $a_n \to 0$ וגם ש- $\exists C : \forall k : |n_{k+1} - n_k| < C$ אז אם הסס"ח$\tilde{A_n}$ מתכנסת אז גם A_n מתכנסת. בעצם התרגיל הוא על טור שאיבריו שואפים ל-0 והקיבוץ לא "רחב ברצוננו" אז אם הטור החדש מתכנס גם הטור המקורי.

2.2 התמרת איברים בטור ומשפט רימן

כבר ראינו שקיבוץ איברים בטור זה בעייתי, אבל מה עם חוק החילוף?

דוגמה 4. נגדיר $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots$, זה מוגדר משום שהטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ (לטורים מחליפי סימן). נוכיח בהמשך ש- $S = \ln 2$, אבל לעת עתה ברור ש- $S > 0$ משום שאפשר לקבץ את האיבר במקום ה- $2n+1$ עם האיבר במקום ה- $2n+2$ ולקבל הפרש של 2 שברים מהצורה $\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+2}$ בכל מחובר וכל אחד מהם חיובי אז גם הטור חיובי. נסדר את איברי הטור בצורה שונה:

$$S = (1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}S$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}S \Rightarrow S = 0$$

התקבלה סתירה! אם כך, מתי כן אפשר להחליף את איברי הטור בלי לשנות דבר?

הגדרה 3. נתון טור $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והעתקה $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל אז הטור $(A') \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ נקרא תמורה של A

משפט 6 (טענת עזר). *יהי $(A) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $(A') \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ תמורה על A.*
אם $\forall n : a_n \geq 0$ ו-A מתכנס אז גם A' מתכנס.

הוכחה. A מתכנס ולכן $\exists C \forall n : \sum_{k=1}^{n} a_k \leq C$ בעת, ניקח את $N = \max\{\sigma(1), \cdots, \sigma(n)\}$ ונראה כי $\sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{N} an \leq C$ ולכן מתכנס.
באותה דרך מוכיחים ש- $A' = A$ □

משפט 7. *יהי* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) *ו-* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ (A') *תמורה על* A *. אם* A *מתכנס בהחלט אז גם* A' *מתכנס בהחלט ומתקיים* $A = A'$

הוכחה. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-$ כאשר a_n^+ הם האיברים החיוביים בטור ו- a_n^- הם הערך המוחלט של האיברים השליליים בטור. שני הטורים מתכנסים (מבחן השוואה ראשון עם הטור המקורי). בעת נסתכל על

$$\sum a_{\sigma(n))} = \sum a_{\sigma(n)}^+ - \sum a_{\sigma(n)}^-$$

אבל כל טור פה הוא תמורה של אחד הטורים שכתבנו רק לפני רגע ואלה טוריים חיוביים ולכן, לפי טענת העזר, הם שווים. המסקנה היא ש-

$$\sum a_{\sigma(n)} = \sum a_n^+ - \sum a_n^- = \sum a_n$$

משפט 8 (משפט רימן)**.** *יהי טור* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *מתכנס על תנאי, אזי לכל* $p \in \mathbb{R}$ *וגם עבור* $p = \pm\infty$ *קיימת תמורה* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *כך ש-* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = p$

הוכחה. נראה שאם הטור מתכנס בתנאי אז $\sum a_n^+, \sum a_n^- = \infty$ משום שאם שניהם היו מתכנסים אז הטור היה מתכנס בהחלט ואם רק אחד מהם היה מתכנס אז הטור היה מתבדר.
כמו כן $a_n \to 0$ (כי זה תנאי הכרחי להתכנסות).
בדי שהטור יתכנס ל- p ממשי, נחבר איברים חיוביים של הטור שוב ושוב עד שנגיע למספר שגדול מ- p, בשלב זה נחסר איברים מ- a_n^- שוב ושוב עד שנגיע למספר שקטן מ- p, בעת שוב נחזור לחבר ואז כשנעבור את p נתחיל לחסר... הטור שקיבלנו שואף ל-p (כי $a_n \to 0$ ומאיך שבנינו את הטור) והוא גם תמורה של הטור המקורי. ברור שזה חח"ע אבל מדוע זה על? פשוט מכך שמכל שלב בטור והלאה, אם רק נחבר a_n^+ או רק נחסר a_n^- נגיע לאינסוף או מינוס אינסוף בהתאמה. מה אם $p = \infty$? נחבר מספיק איברים מ- a_n^+ עד שנעבור את 10 ונחסר איבר מ- a_n^-, ואז נחבר מספיק איברים חיוביים עד שנעבור את ה-100 ושוב נחסר a_n^-, עכשיו נחבר שוב מספיק איברים עד שנעבור את 1000 וכו'... באופן דומה ל- $p = -\infty$ □

3.2 קוד:מכפלת טורים

יהיו 2 טורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (A), $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (B) . נגדיר את הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (C) כאשר $c_n = \sum_{k=0}^{n} = a_k b_{n-k}$

משפט 9. *נניח שהטורים* A, B *מתכנסים בהחלט אזי גם* C *מתכנס בהחלט ו-* $C = A \cdot B$

הוכחה. קודם נראה ש-C מתכנס בהחלט

$$\sum_{n=0}^{m} |c_n| = \sum_{n=0}^{m} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right| \leq \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| \leq$$
$$\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{m} |a_n||b_k| = \sum_{n=0}^{m} |a_n| \cdot \sum_{k=0}^{m} |b_k| = A' \cdot B'$$

כאשר A', B' זה טור הערכים המוחלטים של A, B וידוע שהם קיימים וסופיים משום שהטורים מתכנסים בהחלט. לכן קיים חסם מלעיל לסדרת הסכומים החלקיים של $C' = \sum |c_n|$ ואז הטור מתכנס בהחלט.

נסמן את הסס"ח של A ב-A_n ואת הסס"ח של B ב- B_n. מתקיים ש-

$$A_n B_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_i b_j = C_n + \sum_{n<i+j\leq 2n} a_i b_j$$

נגדיר $S_n = \sum_{i+j\leq n} |a_i||b_j|$ ונראה שזוהי סדרה מונוטונית עולה. מתקיים ש-C מתכנס בהחלט ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k b_{n-k}| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i+j=n} |a_i b_j| < \infty$$

ולכן S_n חסומה ואז מתכנסת לגבול S .

$$|A_n B_n - C_n| = S_{2n} - S_n \to S - S = 0$$

ומאריתמטיקה של גבולות $A \cdot B = C$ $\square$