

יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות.

משפט 1. אם $\exists M : |b_n| < M$, אז $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ (מכפלה של סדרה חסומה בסדרה ששואפת ל-0 זו סדרה ששואפת ל-0)

הוכחה. יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש- a_n שואפת ל-0, לכל מרחק שיתנו לי קיים N כך שלכל $n > N$, מרחק איברי a_n מ-0 קטן מהמרחק ההתחלתי שנתנו לי, בפרט עבור המרחק $\frac{\epsilon}{M}$. מתקיים אז ש-

$$\exists N \forall n > N : |a_n| < \frac{\epsilon}{M} \Rightarrow \exists N \forall n > N : |a_n| \cdot M < \epsilon$$

אבל המרחק של $a_n b_n$ מ-0 הוא

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M$$

וראינו בשורה הקודמת שקיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים ש- $|a_n| \cdot M \leq \epsilon$ ולכן אם ניקח את אותו N , לכל $n > N$ יתקיים ש- $|a_n b_n| < \epsilon$, ומכאן, לפי הגדרת הגבול, $a_n b_n$ שואפת ל-0. \square

דוגמה 1. $a_n = \frac{\sin(n!)}{n}$ היא סדרה שנראית די מסובכת במבט ראשון, אבל היא מתכנסת ל-0. זאת משום שהיא מכפלה של סדרה חסומה, $\sin(n!)$ (תמיד מתקיים ש- $|\sin(x)| \leq 1$) וסדרה ששואפת ל-0, $\frac{1}{n}$.

תרגיל בית: נסו להשתמש בכך שעבור 2 מספרים a, b תמיד מתקיים $||a| - |b|| \leq |a - b|$ כדי להוכיח שאם $a_n \rightarrow L$ אז $|a_n| \rightarrow |L|$. הפריכו את המשפט ההפוך.

משפט 2. $a_n \rightarrow L \Leftrightarrow a_n - L \rightarrow 0$.

משפט 3. אם 2 הסדרות שואפות ל-0 אז גם הסכום והמכפלה שלהן שואפות ל-0.

הוכחה. כדי להוכיח שהמכפלה שואפת ל-0, פשוט נזכור שאחת הסדרות חסומה (כי מתכנסת) והשנייה שואפת ל-0 ולכן המכפלה שלהן שואפת ל-0. עבור סכום, צריך להוכיח ש-

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n + b_n - 0| < \epsilon$$

יהי $\epsilon > 0$, מהנתון ומהגדרת גבול אנו יודעים ש-

$$\exists N_1 \forall n > N_1 : |a_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \forall n > N_2 : |b_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן אם נגדיר $N = \max\{N_1, N_2\}$ יתקיים

$$\forall n > N : |a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

מצאנו N כנדרש. \square

משפט 4 (ארייתמטיקה של גבולות). נניח ש- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ (כאשר $a, b \in \mathbb{R}$) אז:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad .1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab \quad .2$$

$$c \cdot a_n \rightarrow ca \text{ אם } c \text{ קבוע} \quad .3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} \text{ אם } a > 0 \quad .4$$

הוכחה. 1. נסמן $x_n = a_n - a, y_n = b_n - b$ ועפ"י משפט, הם שואפים ל-0. מהמשפט הקודם, הסכום שלהם שואף ל-0:

$$x_n + y_n = a_n - a + b_n - b = (a_n + b_n) - (a + b) \rightarrow 0$$

לפי משפט, זה אומר ש- $a_n + b_n \rightarrow a + b$

2. אם נסתכל על אותם x_n, y_n אז מהמשפט הקודם, המכפלה שלהם שואפת ל-0.

$$a_n b_n = (x_n + a)(y_n + b) = x_n y_n + a \cdot y_n + b \cdot x_n + ab$$

כל אחד מארבעת הרכיבים מתכנס: הראשון ל-0, השני והשלישי הם סדרות ששואפות ל-0 כפול מספר קבוע (שאפשר להתייחס אליו כאל סדרה חסומה) ולכן שואפות ל-0 והרביעי הוא סדרה קבועה ששואפת ל- ab . סך הכל, מהדבר האחרון שהוכחנו (סכום גבולות), $a_n b_n \rightarrow ab$

3. נגדיר $c_n = c \forall n$ ונראה ש- $c_n \rightarrow c$, ממשפטון 2 נקבל את הדרוש

4. יהי אפסילון גדול מ-0. נראה שמתקיימים הדברים הבאים:
 $\exists N_0 \forall n > N_0 : ||a_n| - |a|| < |a|$ (לקחנו את הערך המוחלט של a להיות האפסילון).
 לכן עבור $n > N_0$ מתקיים ש- $|a| < 2|a_n|$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - a_n}{a_n a} \right| = \frac{|a - a_n|}{|a_n| |a|} \leq |a - a_n| \frac{2}{|a_n| |a|}$$

עפ"י הגדרת הגבול

$$\exists N \forall n > N : |a_n - a| \leq \epsilon \frac{|a|^2}{4}$$

מבאן שלכל $n > N$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| \leq |a_n - a| \frac{2}{|a_n| |a|} \leq \epsilon \frac{|a|^2}{4} \frac{2}{|a_n| |a|} = \epsilon \frac{|a|}{2|a_n|} < \epsilon \frac{2|a_n|}{2|a_n|} = \epsilon$$

□