1 המשך סדרות

1.1 סדרות קושי

הגדרה 1. אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי (Cauchy sequence) אם מתקיים התנאי:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n,m>N} : |x_n - x_m| < \epsilon$$

כלומר המרחק בין איברי הסדרה קטן באופן כזה שמאיזהשהו מקום בסדרה והלאה, מרחק בין 2 איברים (שיכולים להיות במקומות רחוקים כרצוננו אחד מהשני בסדרה) יהיה קטן כרצוננו.

משפט 1. *בכל תת קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אם סדרה שמורכבת מאיברי הקבוצה מתכנסת אז היא סדרת קושי (בפרט זה נכון לכל סדרה ב- $\mathbb{R}$).*

הוכחה. יהי אפסילון גדול מ-0, אזי $\exists_N\forall_{n>N}|x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$. לכן מתקיים:
$\forall_{n,m>N} : |x_n - x_m| = |(x_n - L) + (L - x_m)| \leq |x_n - L| + |L - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
□

הגדרה 2. $A \subseteq \mathbb{R}$ נקרא "שלם" אם כל סדרת קושי המורכבת מאיבריו מתכנסת לאיבר בתוכו.

דוגמה 1. $\mathbb{Q}$ לא שלם, כיוון שאם ניקח את

$$3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \cdots \to \pi \notin \mathbb{Q}$$

זוהי סדרה שמתכנסת ב- $\mathbb{R}$ ולכן, מהמשפט הקודם, היא סדרת קושי. אבל היא סדרת קושי שמורכבת מאיברים רציונאליים ולא מתכנסת למספר רציונאלי, ולכן קבוצת המספרים הרציונאליים לא מהווה מרחב שלם.

מסקנה 2. *בכל מרחב שלם, סדרה מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי.*

הוכחה. מימין לשמאל זה נכון באופן כללי מהמשפט הקודם (סדרה מתכנסת היא תמיד סדרת קושי) ומשמאל לימין נובע מההגדרה של מרחב שלם, שדורש שכל סדרת קושי תתכנס למשהו בתוכו, ובפרט תתכנס. □

משפט 3. *$\mathbb{R}$ שלם*

הוכחה. נניח $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, אזי לכל אפסילון חיובי

$$\exists_N\forall_{n,m>N}|x_n - x_m| < \epsilon$$

ואז $x_m - \epsilon < x_n < x_m + \epsilon$ וזה נכון לכל $n > N$ ולכן

$$x_m - \epsilon \leq l_{N+1} \leq L_{N+1} \leq x_m + \epsilon$$

מהעברת אגפים מקבלים ש- $0 \leq L_{N+1} - l_{N+1} \leq 2\epsilon$. אם ניקח לכן סדרת אפסילונים ששואפת ל-0 ובהתאם אליהם ניקח את ה- Nים המתאימים וממשפט הסנדוויץ' נקבל שהגבול העליון והתחתון שווים, ואז לפי משפט הסדרה מתכנסת אליהם. □

דוגמה 2. נסתכל על

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

נראה כי המרחק בין איברים עוקבים בסדרה הולך ושואף ל-0: $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}\to 0$, אף על פי כן, הסדרה לא תתכנס. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, ולכן אם נראה שהסדרה הזאת לא סדרת קושי, אז בהכרח היא לא מתכנסת. אכן, נראה כי

$$x_{2n}-x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

כלומר אין מקום בו משם והלאה המרחק בין כל 2 איברים קטן מחצי, ולכן זו לא סדרת קושי.

מסקנה 4. *הטור ההרמוני, שמוגדר להיות* $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ *שווה לאינסוף.*

הסבר: הסדרה הזאת היא מונוטונית עולה ולכן מתכנסת ל- $\sup x_n$ אבל אם זה היה מספר ממשי היינו מקבלים סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת, בסתירה למה שהרגע הוכחנו. לכן בהכרח $\sup x_n=\infty$ ולשם הסדרה שואפת.

2.1 למת קנטור על חיתוך קטעים סגורים

למה 5 (למת קנטור). *נתונה סדרה של קטעים סגורים* $[a_n,b_n]$ *כך ש-* $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$. *אם מתקיים* $|b_n-a_n|\to 0$ *אזי* $\exists c:\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$

הוכחה. נראה כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה בעוד ש- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונו' יורדת.
בנוסף, $a_n\leq b_1, b_n\geq a_1$ ולכן הסדרות האלה הן מונוטוניות וחסומות אז מתכנסות.
נגדיר $\sup a_n=a, \sup b_n=b$ ואז אנו יודעים ש- $a_n\to a, b_n\to b$. אבל מאריתמטיקה של גבולות ביוון ש- $b_n-a_n\to 0$ אז $b-a=0\Rightarrow b=a$. נגדיר $c:=b=a$ ונוכיח ש- $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$

$\boxed{\supseteq}$

$$a_n\leq a=c=b\leq b_n\Rightarrow\forall n:c\in[a_n,b_n]\Rightarrow c\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$$

$\boxed{\subseteq}$

$$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\Rightarrow\forall x:x\in[a_n,b_n]\Rightarrow\forall n a_n\leq x\wedge x\leq b_n$$

מהגדרת אינפימום וסופרימום נקבל ש-

$$a\leq x\wedge x\leq b\Rightarrow a=x=b\Rightarrow x=c$$

$\square$

2 טורים

1.2 טורים

2.2 מהו טור

הגדרה 3. תהי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר את הסדרה $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר להיות $\lim_{k\to\infty} s_k$. במקרה כזה, s_k נקראת סדרת הסכומים החלקיים של הטור (או בקיצור הסס"ח). אם הגבול הזה קיים אומרים שהטור מתכנס, ואחרת אומרים שהוא מתבדר.

דוגמה 3. דוגמה: הצגה עשרונית - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ כש- $a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. זה מתכנס משום שהסס"ח היא סדרת קושי.

3.2 תבונות בסיסיות של טורים

משפט 6. *נניח הטורים* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *מתכנסים אזי*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n + \beta b_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

הוכחה. ישירות מאריתמטיקה של גבולות □

משפט 7 (מבחן קושי)**.** *הטור* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *מתכנס אם ורק אם*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{n>m>N} : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \epsilon$$

הוכחה. בעצם התנאי בצד שמאל זה פשוט ההגדרה ש- s_n סדרת קושי, ובידוע סדרה היא מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי. □

משפט 8. *אם* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *מתכנס אזי* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *(המשפט ההפוך לא נכון! ראינו שהטור ההרמוני מתבדר למרות שהאיבר הכללי שואף ל-0)*

הוכחה. נראה כי $a_n = s_n - s_{n-1}$ ואז מאריתמטיקה של גבולות, $\lim_{n\to\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$ □

דוגמה 4. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}+1}{2n+3}$ מתבדר כי האיבר הכללי שואף לחצי

4.2 טורים עם איברים חיוביים

משפט 9. $\forall n : a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים חסומה מלעיל, כלומר* $\exists C \forall n : s_n \leq C$

הוכחה. נשים לב שהסס"ח היא סדרה מונוטונית עולה במקרה שכל איברי הטור חיוביים ולכן מתכנסת ל- sup שלה. אם היא חסומה מלעיל אז הסופרימום ממשי ואז הטור מתכנס, בעוד שאם היא לא חסומה זה אומר ששואפת לאינסוף ולכן הטור מתבדר. □

5.2 מבחן ההשוואה הראשון לטורים

6.2 סימני לנדאו

סימני לנדאו מהווים דרך קצרה לכתוב מידע על התנהגות פונקציות אחת ביחס לשנייה בסביבת נקודה או "באינסוף". פה נמצאים ההגדרות של הסימנים עבור סדרות, עבור פונקציות ניתן להגדיר בצורה אנלוגית.
תהיינה הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

1. מסמנים $a_n = O(b_n), n \to \infty$ ("הסדרה a_n היא O גדול של b_n") אם מתקיים

$$\exists_{M>0}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} 0 \le a_n \le M \cdot b_n$$

הסימן הזה חוזר המון במחשבים כשבודקים יעילות של אלגוריתמים. לדוגמה אלגוריתם שמקבל קלט n מסוים ועושה $a_n = 2n+4$ פעולות אומרים שהיעילות שלו היא מסדר $O(n)$ משום שאכן $2n+4 = O(n), n \to \infty$, כי אם ניקח $M = 3$ אז אכן ממקום מסוים והלאה, $2n + 4 \le 3n$.

2. מסמנים $a_n = O^*(b_n), n \to \infty$ אם מתקיים

$$\exists_{M,m>0}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} m_0 \cdot b_n \le a_n \le M \cdot b_n$$

שימו לב שאם $a_n = O^*(b_n)$ אז $a_n = O(b_n)$ וגם $b_n = O^*(a_n)$ (כל אלה כמובן כש- $n \to \infty$ משום שאלה סדרות, אבל בפונקציות זה גם יתקיים סביב נקודות)

3. נניח $b_n \neq 0$ אז אפשר להגדיר את הסימן $a_n = o(b_n), n \to \infty$ ("הסדרה a_n היא o קטן של b_n") אם

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

אפשר לחשוב על זה אינטואיטיבית של b_n גדל הרבה הרבה יותר מהר מ-a_n או ש-a_n אפסי לעומת b_n, הסימן הזה יחזור הרבה כשנדבר על נגזרות.

דוגמה 5. $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n}), n \to \infty$

4. $a_n \sim b_n, n \to \infty$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

משפט 10. *יהיו הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ונניח ש- $\forall n: a_n, b_n \ge 0$ אזי*

1. *אם* $a_n = O(b_n)$ *אז* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$
2. *אם* $a_n = O^*(b_n)$ *אז* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$

הערה 1. מההגדרות של סימני לנדאו מתקיים ש-

$$a_n = O^*(b_n) \Leftrightarrow b_n = O^*(a_n)$$

ומכל אחד מהם נובע ש-

$$a_n = O(b_n), b_n = O(a_n)$$

מכאן שאם משפט 1 נכון ו- $a_n = O^*(b_n)$ אז משפט 2 מתקבל ישירות

הוכחה.

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : a_n \leq M \cdot b_n$$

וגם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס ולכן

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} M \cdot b_n = M \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

והטור האחרון מתכנס, ומזה מסיקים ש- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ חסום מלעיל ולכן מתכנס. בעת רק נשאר לראות ש- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ וזה כידוע, מתכנס. $\square$

מסקנה 11 (מבחן ההשוואה הגבולי בצורתו המוכרת יותר). *יהיו הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ונניח ש- $\forall n : a_n, b_n \geq 0$ וגם הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ קיים. אזי*

1. *אם $L = 0$ אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$*
2. *אם $L \neq 0$ הטורים "חברים", כלומר אחד מתכנס אם ורק אם השני מתכנס*

הוכחה. 1. אם $L = 0$ אז

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 1$$

ומכאן ש- $a_n = O(b_n), n \to \infty$. כל מה שנשאר זה להשתמש במשפט הקודם וסיימנו.

2. אם $L \neq 0$ אז

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : \frac{a_n}{b_n} < 2L$$

ולכן מהעברת אגפים $a_n = O(b_n)$. מצד שני כיוון ש- $L \neq 0$ אז אפשר לעשות את אותו טריק על $\frac{b_n}{a_n}$ והגבול $\frac{1}{L}$ ולקבל ש- $b_n = O(a_n)$. עכשיו שוב אפשר להפעיל את המשפט הקודם ולקבל את הדרוש.

$\square$

דוגמה 6. נסתכל על $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$ עבור $a, b \neq 0$ קבועים. נראה ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{an+b}} = a$$

ולכן, ממבחן ההשוואה הגבולי, הטור הזה "חבר" של הטור ההרמוני שמתבדר, ומכאן שהטור מתבדר.

7.2 מבחן העיבוי לטורים

משפט 12. *נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ כך ש- $\forall n : 0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ (כלומר a_n מונוטונית יורדת).*
אזי הטור הזה והטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2^k} \cdot 2^k$ חברים.

דוגמה 7. הטור ההרמוני הוא טור שאיבריו מהווים סדרה מונוטונית יורדת, ולכן חבר של הטור

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1$$

וברור שהטור הזה מתבדר. האמת שאפשר עם מבחן העיבוי להגיע לתוצאה יותר כללית עכשיו:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^p} \cdot 2^k$ מתכנס, אבל האיבר הכללי של הטור הוא בעצם $(2^{1-p})^k$, כלומר סדרה הנדסית.

טור הנדסי מתכנס אם ורק אם היחס בין איבריו הוא בין -1 ל- 1 , ומכאן שצריך להתקיים $2^{1-p} < 1 = 2^0$. זה קורה אם ורק אם $1 - p < 0$ וזה קורה אם ורק אם $p > 1$

הוכחה. לשם הפשטות נקרא לסס"ח של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ בשם A_n ולסס"ח של $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2^n} \cdot 2^n$ בשם S_n. כעת, מצד אחד:

$$S_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots = a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) \geq$$

$$a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) = A_{2^n-1}$$

(השתמשנו בעובדה שהסדרה מונו' יורדת)

ומצד שני

$$S_n = a_1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{2^k} \cdot 2^{k-1} = a_1 + 2[a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \cdots] \leq$$

$$a_1 + 2[a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots] = 2A_{2^n} - a_1$$

(גם פה השתמשנו בעובדה שהסדרה מונו' יורדת)

לסיכום: $A_{2^n-1} \leq S_n \leq 2A_{2^n} - a_1$

אם A_n סדרה מתכנסת ל- C אז נקבל (מכך שהסדרה A_n מונוטונית עולה) ש- $S_n \leq 2C - a_1$, כלומר חסומה מלעיל, ולכן מתכנסת. מאי השיוויון שקיבלנו אפשר לקבל את הכיוון בשני של הטענה באופן דומה. $\square$

הערה 2. אם הסדרה לא מונו' יורדת, המשפט לא יתקיים. דוגמה די מאולצת היא הסדרה

$$x_n = 0, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, 0, \frac{1}{9}, \cdots$$

במקרה הזה $S_n = 0$ ולכן ברור שהטור "המתאים" שלה מתכנס, אבל הטור לא מתכנס. כי אם נגדיר

$$y_n = 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, \frac{1}{8}, 0, \cdots$$

אז $\sum y_n$ הוא בעצם טור הנדסי (מלבד הרבה אפסים שדחפו "באמצע") ולכן מתכנס. בעת נראה ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

ואז אם $\sum x_n$ מתכנס גם הטור ההרמוני יתכנס ופה הסתירה.

8.2 מבחן לוגריתמי

משפט 13. *נתון טור* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *שכל איבריו חיוביים. נניח שקיים*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(a_n)}{\ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \log_n \frac{1}{a_n} = \alpha$$

(אם הטור הזה מועמד להתכנסות אז האיבר הכללי שואף ל-0 ולכן אפשר לראות שבכל מקרה α *חייב להיות חיובי במקרה זה).*

(א) אם $\alpha > 1$ *(גם אינסופי זה בסדר) הטור מתכנס*
(ב) אם $\alpha < 1$ *הטור מתבדר*

הוכחה. (א) $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0} : \log_n \frac{1}{a_n} > \alpha'$ עבור $1 < \alpha' < \alpha$.
קיבלנו $\frac{1}{a_n} > n^{\alpha'}$ ואז כמובן $\frac{1}{n^{\alpha'}} > a_n$ והטור $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha'}}$ מתכנס (הוכחנו בשדיברנו על מבחן העיבוי) ולכן, ממבחן ההשוואה הראשון, הטור שלנו מתכנס

(ב) ההוכחה אנלוגית ממש רק שניקח $\alpha < \alpha' < 1$ ונקבל טור שהוכחנו שהוא מתבדר בשדיברנו על מבחן העיבוי.

□

דוגמה 8. האם הטור הבא מתכנס או מתבדר?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$$

פתרון: נראה כי $\lim_{n\to\infty} \log_n(n^{\ln(\ln(n))}) = \lim_{n\to\infty} \ln(\ln(n)) = \infty$ ולכן ממבחן לוגריתמי הטור מתכנס

9.2 מבחן המנה של דלאמבר לטורים

משפט 14. *נתון טור* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *שכל איבריו חיוביים. נניח שקיים* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ *אזי*

(א) אם $q < 1$ *הטור מתכנס*
(ב) אם $q > 1$ *(אפשר גם אינסופי) הטור מתבדר*

הוכחה. (א) $\exists_{n_0}\forall_{n\geq n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q'$ עבור $q < q' < 1$ ואז $\forall n \geq n_0 : a_{n+1} \leq q' a_n$. מכאן ש-

$$a_{n+1} \leq a_n \cdot q' \leq a_{n-1} \cdot q'^2 \leq \cdots \leq a_{n_0} \cdot q'^{n+1-n_0} = a_{n_0} q'^{1-n_0} \cdot q'^n$$

נסיק ש- $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq a_{n_0} q'^{1-n_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q'^n$ אבל זהו טור הנדסי שמתכנס, ולכן, ממבחן ההשווא ההראשון, נקבל את הדרוש.

(ב) מוכיחים את זה באופן אנלוגי ל-1 רק שצריך לקחת $1 < q' < q$ ואי השיוויונים מתהפכים.

□

דוגמה 9. אם $q = 1$ אי אפשר לדעת, לדוגמה אם ניקח את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ אז בבל מקרה נקבל $q = 1$ אבל עבור pים שונים נקבל התכנסות/התבדרות

10.2 מבחן השורש של קושי להתכנסות טורים

משפט 15. *נתון הטור* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *שכל איבריו חיוביים. נסמן* $q=\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ *אזי מתקיים:*

(א) אם $q>1$ *(גם אינסופי זה בסדר) הטור מתבדר*

(ב) אם $q<1$ *אז הטור מתכנס*

הוכחה. (א) גבול עליון הוא גבול חלקי, ולכן קיימת תת סדרה כך ש-

$$\exists k_0\forall k>k_0:\ \sqrt[n_k]{a_{n_k}}>1$$

ולכן $\forall k>k_0:a_{n_k}>1$ ואז $a_n\not\to 0$. כלומר הטור לא יכול להתכנס.

(ב) $\exists n_0\forall n>n_0:\ \sqrt[n]{a_n}<q'$ עבור $q<q'<1$ ולכן $\forall_{n>n_0}a_n<q'^n$. ממבחן ההשוואה הראשון משום ש- $\sum q'^n$ מתכנס אז גם הטור שלנו.

□

דוגמה 10. כמו במבחן דלאמבר, גם פה הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס/מתבדר כתלות ב-p אבל הגבול הרצוי ממבחן השורש של קושי הוא 1, מה שמראה שגבול 1 לא מבטיח התכנסות ולא התבדרות.