1 המשך סדרות

1.1 סדרות מונוטוניות

הגדרה 1. אומרים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ "עולה מונוטונית" אם $\forall n: x_n \leq x_{n+1}$, במקרה כזה יש באלה שמסמנים $x_n \nearrow$.
באופן דומה "יורדת מונוטונית" תהיה סדרה בה $\forall n: x_n \geq x_{n+1}$ ובמקרה כזה יש באלה שמסמנים $x_n \searrow$

משפט 1. *תהי סדרה* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *כך ש-* $\sup x_n = M, \inf x_n = m$. *אם* $x_n \nearrow$ *אז הסדרה מתכנסת ל-* M *ואם* $x_n \searrow$ *אז הסדרה מתכנסת ל-* m.

הוכחה. נוכיח עבור סדרה מונוטונית עולה, ועבור מונוטונית יורדת ההוכחה אנלוגית. אם $M \in \mathbb{R}$ אז יהי $\epsilon > 0$ לפי תבונה של סופרימום, $\exists n_0 : x_{n_0} > M - \epsilon$ וכיוון שזו סדרה מונוטונית עולה,

$$\forall n > n_0 : M - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq M < M + \epsilon$$

ואז $x_n \to M$.
אם $M = \infty$ אז יהי $E \in \mathbb{R}$. מההגדרה של חסם עליון אינסופי, $\exists n_0 : x_{n_0} > E$ וכיוון שזו סדרה מונוטונית עולה, $\forall n > n_0 : E < x_{n_0} \leq x_n$ ואז $x_n \to \infty = M$.
□

2.1 מעבר גבול

תהי הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שאיבריה נראים כבה: $x_1, x_2, x_3, \cdots$ ונניח ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. נסתכל על הסדרה x_{n+1} שאיבריה הם $x_2, x_3, x_4, \cdots$, ונראה ש- $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ גם כן. זאת משום שעבור $\epsilon > 0$ ידוע ש- $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} : |x_n - L| < \epsilon$ וכיוון שזה לכל $n > n_0$ אז במצב כזה גם $n+1$ (שהוא גדול מ- n שגדול מ- n_0) מקיים את הטענה ש- $|x_{n+1} - L| < \epsilon$.
העקרון הזה הוא ליבו של טריק נחמד שעוזר לחשב במקרים רבים גבולות של סדרות הנתונות בצורה רקורסיבית. השיטה היא כזאת: אם נתון ש- $x_{n+1} = f(x_n)$ אז גם $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ אבל $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = L$ ובאגף ימין אפשר גם להשתמש באריתמטיקה של גבולות כדי להציב L במקומות המתאימים, וכך מגיעים למשוואה. צריך לשים לב שכל זה בא בהנחה שהסדרה x_n מתכנסת, ואת זה יש להוכיח!

דוגמה 1. מהו הגבול של הסדרה $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$?
פתרון: נניח שהסדרה מתכנסת, ולכן $\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+x}$. מכאן

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} 2 + x_n$$

נציב $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ ואז

$$L^2 = 2 + L$$

$$L^2 - L - 2 = (L-2)(L+1) = 0$$

$$L = -1, 2$$

מצאנו שבמקרה שהסדרה מתכנסת, יש רק מועמד אחד שיכול להיות הגבול (-1 נפסל משום שכל איברי הסדרה חיוביים ולכן לא יכולים להתכנס למספר שלילי). אם נצליח להוכיח שהסדרה מתכנסת, הגבול שלה הוא 2. נוכיח שהיא מונוטונית עולה וחסומה ע"י 2:
מונוטונית עולה -

$$x_n \le x_{n+1} \Leftrightarrow x_n \le \sqrt{x_n+2} \Leftrightarrow x_n^2 \le x_n + 2 \Leftrightarrow -1 \le x_n \le 2$$

כלומר הסדרה לא תרד כל עוד האיברים בין -1 ל-2. כל איברי הסדרה חיוביים ועכשיו נוכיח שכל איברי הסדרה לא גדולים מ-2 באמצעות אינדוקציה:

$$x_1 = \sqrt{2} < 2, x_n \le 2 \Rightarrow x_{n+1} = \sqrt{x_n+2} \le \sqrt{2+2} = 2$$

אז כל איברי הסדרה קטנים מ-2 ולכן הסדרה מונוטונית עולה וחסומה ומכאן שמתכנסת ל-2. (את הגבול חישבנו באמצעות מעבר הגבול)

3.1 סכום של סדרה הנדסית

הגדרה 2. סדרה a_n נקראת סדרה הנדסית אם $\exists q \forall n : a_{n+1} = q \cdot a_n$.

נסמן את הסדרה $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})$ ונשים לב ש- $x_n(1-q) = a_1(1-q^n) \Rightarrow x_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$. מה הגבול של הסדרה הזאת?

אם $|q| > 1$ אז $\lim_{n\to\infty} |\frac{q^n-1}{q-1}| = \infty$

אם $|q| < 1$ אז $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ואז לפי אריתמטיקה של גבולות, $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$

אם $q = 1$ אז נשים לב ש- $a_n = a_1$ ולכן $x_n = n \cdot a_1$ ולכן חוץ מבמקרה המנוון בו האיבר הראשון הוא 0, הסדרה לא תתכנס.

אם $q = -1$ אז x_n תראה ככה: $a_1, 0, a_1, 0, \cdots$, ושוב זה לא מתכנס חוץ מבמקרה בו $a_1 = 0$

4.1 אי שיוויון ברנולי

משפט 2.

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x > -1 : (1+x)^n \ge 1 + nx$$

הוכחה. באינדוקציה: עבור $n = 1$ נקבל ש- $1+x \ge 1+x$ שזה כמובן נכון. נניח שהטענה נכונה עבור n כללי ונראה שעבור $n+1$ מתקיים

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \ge (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 =$$

$$1 + (n+1)x + nx^2 \ge 1 + (n+1)x$$

□

2 המספר של אוילר e

2.1 הגדרה

נגדיר את $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

משפט 3. *קיים הגבול* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *, לגבול הזה קוראים* e.

הוכחה. נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.
עולה מונוטונית:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^n}{(\frac{n}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n+1)^n(n-1)^{n-1}}{n^n n^{n-1}} =$$

$$\frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = (1-\frac{1}{n^2})^n \frac{n}{n-1}$$

לפי אי שיוויון ברנולי, זה גדול או שווה לביטוי הבא:

$$(1+n(-\frac{1}{n^2}))\cdot\frac{n}{n-1} = \frac{(n-1)n}{n(n-1)} = 1$$

מכאן שזוהי סדרה מונוטונית עולה.
<u>חסומה מלעיל:</u>
$x_n = (1+\frac{1}{n})^n$
ואם נפתח את הביטוי לפי הבינום של ניוטון נקבל

$$x_n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

איבר טיפוסי בסכום הזה הוא מהצורה

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{1}{n^k} \le \frac{n^n}{n^{n-k}k!}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}$$

ולכן

$$x_n \le 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

כל מה שאחרי ה-2 זה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה 1 ולכן נקבל ש- $x_n \le 3$
אז זוהי סדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל ולכן מתכנסת.

□

2.2 תבונות של e

משפט 4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e$

הוכחה. נגדיר $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. צריך להראות ש- $e_n \to e$. אם נשתמש באותה סדרה x_n שהגדרנו אז ראינו בהוכחה של המשפט הקודם ש- $x_n \le e_n$. מצד שני אם נכתוב את x_n בצורה מפורשת אפשר גם לראות ש-

$$x_n = 1 + 1 + \cdots + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$

ולכן אם נקבע k ספציפי וניקח $n > k$ נקבל ש-

$$x_n \geq 1 + 1 + \cdots + \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$$

ואם נשאיף את $n \to \infty$ אז נקבל בצד ימין בדיוק את e_k ובצד שמאל את e. גבול שומר על אי שיוויון חלש ולכן נקבל

$$x_n \leq e_n \leq e$$

ולפי משפט הסנדוויץ' נקבל את הדרוש.

□

נשים לב שאם נגדיר $e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ אז אם $N > n$ מתקיים

$$e_N - e_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots \frac{1}{N!} \leq \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{N-n-1}}\right) =$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{\frac{1}{n+2}\left(\left(\frac{1}{n+2}\right)^{N-n} - 1\right)}{\frac{1}{n+2} - 1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{n+1}$$

כעת נשתמש בזה בשביל להוכיח:

משפט 5. $e \notin \mathbb{Q}$

הוכחה. נניח $e = \frac{p}{q} = 1 + \cdots + \frac{1}{n!} + \alpha_n$ ומכאן $|\alpha_n| < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{n+1}$ וע"י כפל של 2 האגפים נקבל

$$(n+1)!\frac{p}{q} = (n+1)!\left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + (n+1)!\alpha_n$$

וזה נכון לכל n, בפרט ל- $n > q$. במקרה זה, אגף שמאל שלם ואגף ימין מורכב ממשהו שהוא שלם ועוד $(n+1)!\alpha_n$ אבל החלק האחרון הזה הוא לא שלם משום שקטן מ- $\frac{1}{n+1}$. אגף שמאל, שהוא שלם הוא סכום של משהו שלם ומשהו שהוא לא שלם. סתירה □

3 גבולות חלקיים

1.3 גבול עליון ותחתון

תהי סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. נגדיר 2 סדרות חדשות: $L_n = \sup\{x_k : k \geq n\}, l_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$. ברור ש- $l_n \leq L_n$.

תזכורת: $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow \inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

מהתזכורת הזאת נשים לב ש- L_n מונו' (מונוטונית) יורדת ו- L_n מונו' עולה. זאת משום ש- $\{x_k : k \geq n\} \subseteq \{x_k : k \geq n+1\}$ ולכן $l_n \leq l_{n+1} \leq L_{n+1} \leq L_n$

הגדרה 3. הגבול העליון של x_n, שמסומן באופן הבא: $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ מוגדר להיות $\lim_{n\to\infty} L_n$. באותו אופן, הגבול התחתון הוא $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} l_n$.

משפט 6. *תהי סדרה חסומה x_n אזי*
הגבול העליון והתחתון זהים אם ורק אם הסדרה x_n מתכנסת (ואז תתכנס לגבול העליון/תחתון)

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נראה ש- $l_n \leq x_n \leq L_n$ אבל הקצוות מתכנסים לאותו מספר L ולכן, ממשפט הסנדוויץ', $x_n \to L$.
$\boxed{\Rightarrow}$ יהי $\varepsilon > 0$. אנו יודעים ש- $\exists N \forall n > N : x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ואז לפי ההגדרה $\forall n > N : L-\varepsilon < x_n < L+\varepsilon$. לכן גם

$$\forall n > N : L-\varepsilon \leq l_n \leq L_n \leq L+\varepsilon$$

ובעצם קיבלנו ש- $\exists N \forall n > N : |L_n - L|, |l_n - L| < \varepsilon$ $\square$

2.3 תתי סדרות

הגדרה 4. תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ אינסופית אז הצמצום של הסדרה $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ אל הקבוצה A נקראת תת סדרה של x_n. עוד דרך להסתכל על זה היא לקחת סדרה חד חד ערכית של טבעיים שמונוטונית עולה, n_k (לדוגמה $n(k) = 2k$ היא סדרת הזוגיים $(2, 4, 6, \cdots$ ואז להסתכל על $f(n(k))$ או x_{n_k}.

דוגמה 2. נסתכל על הסדרה $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$ נסתכל על הסדרה שנמצאת במקומות הזוגיים, כלומר ניקח את $A = \mathbb{N}_{\text{even}}$ ואז $n(k) = 2k$ ו- x_{n_k} נראית כבה: $0, 0, 0, 0, \cdots$. הסדרה המקורי לא מתכנסת, אבל תת הסדרה הזאת כן מתכנסת, ל-0. זה הרעיון של גבול חלקי.

3.3 גבולות חלקיים

הגדרה 5. $l \in \mathbb{R}$ נקרא גבול חלקי של סדרה אם קיימת תת סדרה שלה שמתכנסת ל- l

משפט 7. *אם $x_n \to L$ אז כל תת סדרה שלה מתכנסת ל-L.*

הוכחה. תהי תת סדרה x_{n_k} ויהי אפסילון גדול מ-0. עפ"י הנתון $\exists n_0 \forall n > n_0 |x_n - L| < \epsilon$. ידוע ש- n_k סדרה חח"ע מונוטונית עולה של טבעיים, ולכן היא לא חסומה וקיים k_0 כך ש- $\forall k > k_0 : n_{k_0} > n_0$. מכאן ש- $\forall k > k_0 : |x_{n_k} - L| < \varepsilon$ $\square$

משפט 8. *תהי סדרה שכל תת סדרה שלה מתכנסת ל- L, אזי $x_n \to L$.*

הוכחה. נניח בשלילה שהסדרה לא מתכנסת ל- L, אזי $\exists_{\epsilon>0} \forall_N \exists_{n>N} : |x_n - L| \geq \epsilon$. אם כך, נבנה תת סדרה x_{n_k} באופן הבא: לכל N קיים $n > N$ שעבורו $|x_n - L| \geq \epsilon$ ולכן ניקח את אותם nים עבור $N = 1, 2, 3, \cdots$ ואלה יהיו ה- n_k. באופן הזה נקבל תת סדרה שהמרחק בין איבר בה ל-L גדול או שווה לאפסילון אבל זה סותר את הנתון שכל תתי הסדרות שואפות ל- L. $\square$

4.3 קשר בין גבולות חלקיים לגבול עליון ותחתון

משפט 9. *כל גבול חלקי של סדרה הוא בין הגבול התחתון שלה לגבול העליון שלה.*

הוכחה. יהי l גבול חלקי אז קיימת תת סדרה $x_{n_k} \to l$. מתקיים ש- $l_{n_k} \leq x_{n_k} \leq L_{n_k}$ וממשפט הסנדוויץ' נקבל את הדרוש. $\square$

משפט 10. *הגבול העליון והתחתון הם גבולות חלקיים*

הוכחה. $L_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ ואז לכל k מתקיים $\exists_{n_k} : L_k - \frac{1}{k} < x_{n_k} < L_k$ ואז קיימת תת סדרה מונוטונית שלפי משפט הסנדוויץ' מתכנסת לגבול העליון. עבור הגבול התחתון באופן אנלוגי. $\square$

5.3 משפט בולצאנו ווירשטראס

משפט 11. *לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת*

הוכחה. $-M \le l_n \le M \Leftarrow -M \le x_n \le M$ ואז l_n מונו' עולה וחסומה ומכאן שמתכנסת, אז הגבול התחתון קיים, והוא גבול חלקי, ולכן יש תת סדרה מתכנסת. $\square$