

# 1 המשך סדרות

## 1.1 סדרות חסומות

**הגדרה 1.** סדרה  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  נקראת חסומה אם קבוצת איברי הסדרה חסומה (ראינו את ההגדרה של קבוצה חסומה).

**דוגמה 1.** הסדרה הזאת לא חסומה:  
 $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, \dots$   
משום שלא חסומה מלעיל.

**משפט 1.** כל סדרה מתכנסת היא חסומה

*הוכחה.* בניח שהסדרה מתכנסת ל- $L$ , ולכן לכל אפסילון קיים  $N$  כך ש-  
 $\forall n > N : |a_n - L| < \varepsilon$ . בפרט, עבור  $\varepsilon = 1$ . נגדיר

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |L + 1|\}$$

ונראה ש- $\forall n : |a_n| \leq M$  משום שאם  $n \leq N$  אז האיבר  $|a_n|$  נמצא בקבוצה ש- $M$  הוא המקסימום שלה, ואם  $n > N$  אז גם ככה  $|a_n - L| < 1$  ולכן  $|a_n| < |L| + 1 \leq M$ .  $\square$

*הערה 1.* המשפט ההפוך לא נכון. לדוגמה הסדרה  $a_n = (-1)^n$  חסומה מלעיל ע"י 1 ומלרע ע"י -1 אבל לא מתכנסת

## 2.1 אריתמטיקה של גבולות

יהיו  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  סדרות.

**משפט 2.** אם  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$  ואם  $a_n \rightarrow 0$ ,  $\exists M : |b_n| < M$  (מכפלה של סדרה חסומה בסדרה ששואפת ל-0 או סדרה ששואפת ל-0)

*הוכחה.* יהי  $\varepsilon > 0$ . ביוון ש- $a_n$  שואפת ל-0, לכל מרחק שיתנו לי קיים  $N$  כך שלכל  $n > N$ , מרחק איברי  $a_n$  מ-0 קטן מהמרחק ההתחלתי שנתנו לי, בפרט עבור המרחק  $\frac{\varepsilon}{M}$ . מתקיים אז ש-

$$\exists N \forall n > N : |a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \exists N \forall n > N : |a_n| \cdot M < \varepsilon$$

אבל המרחק של  $a_n b_n$  מ-0 הוא

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot M$$

וראינו בשורה הקודמת שקיים  $N$  כך שלכל  $n > N$  מתקיים ש- $|a_n| \cdot M \leq \varepsilon$  ולכן אם ניקח את אותו  $N$ , לכל  $n > N$  יתקיים ש- $|a_n b_n| < \varepsilon$ , ומכאן, לפי הגדרת הגבול,  $a_n b_n$  שואפת ל-0.  $\square$

**דוגמה 2.**  $a_n = \frac{\sin(n!)}{n}$  היא סדרה שנראית די מסובכת במבט ראשון, אבל היא מתכנסת ל-0. זאת משום שהיא מכפלה של סדרה חסומה,  $\sin(n!)$  (תמיד מתקיים ש- $|\sin(x)| \leq 1$ ) וסדרה ששואפת ל-0,  $\frac{1}{n}$ .

**תרגיל בית:** נסו להשתמש בכך שעבור 2 מספרים  $a, b$  תמיד מתקיים  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  כדי להוכיח שאם  $a_n \rightarrow L$  אז  $|a_n| \rightarrow |L|$ . הפריכו את המשפט ההפוך.

**משפט 3.**  $a_n \rightarrow L \Leftrightarrow a_n - L \rightarrow 0$ .

**משפט 4.** אם 2 הסדרות שואפות ל-0 אז גם הסכום והמכפלה שלהן שואפות ל-0.

**הוכחה.** כדי להוכיח שהמכפלה שואפת ל-0, פשוט נזכור שאחת הסדרות חסומה (כי מתכנסת) והשנייה שואפת ל-0 ולכן המכפלה שלהן שואפת ל-0. עבור סכום, צריך להוכיח ש-

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N : |a_n + b_n - 0| < \epsilon$$

יהי  $\epsilon > 0$ , מהנתון ומהגדרת גבול אנו יודעים ש-

$$\exists N_1 \forall n > N_1 : |a_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists N_2 \forall n > N_2 : |b_n - 0| < \frac{\epsilon}{2}$$

לכן אם נגדיר  $N = \max\{N_1, N_2\}$  יתקיים

$$\forall n > N : |a_n + b_n - 0| = |a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

מצאנו  $N$  כנדרש.

□

**משפט 5** (אריטמטיקה של גבולות). נניח ש- $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$  (כאשר  $a, b \in \mathbb{R}$ ) אז:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$$

$$3. \text{ אם } c \text{ קבוע אז } c \cdot a_n \rightarrow ca$$

$$4. \text{ אם } a > 0 \text{ אז } \frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$$

**הוכחה.** 1. נסמן  $x_n = a_n - a, y_n = b_n - b$  ועפ"י משפט, הם שואפים ל-0. מהמשפט הקודם, הסכום שלהם שואף ל-0:

$$x_n + y_n = a_n - a + b_n - b = (a_n + b_n) - (a + b) \rightarrow 0$$

לפי משפט, זה אומר ש- $a_n + b_n \rightarrow a + b$

2. אם נסתכל על אותם  $x_n, y_n$  אז מהמשפט הקודם, המכפלה שלהם שואפת ל-0.

$$a_n b_n = (x_n + a)(y_n + b) = x_n y_n + a \cdot y_n + b \cdot x_n + ab$$

כל אחד מארבעת הרכיבים מתכנס: הראשון ל-0, השני והשלישי הם סדרות ששואפות ל-0 בפול מספר קבוע (שאפשר להתייחס אליו כאל סדרה חסומה) ולכן שואפות ל-0 והרביעי הוא סדרה קבועה ששואפת ל- $ab$ . סך הכל, מהדבר האחרון שהוכחנו (סכום גבולות),  $a_n b_n \rightarrow ab$ .

3. נגדיר  $\forall n : c_n = c$  ונראה ש- $c_n \rightarrow c$ , ממשפטון 2 נקבל את הדרוש

4. יהי אפסילון גדול מ-0. נראה שמתקיימים הדברים הבאים:  
 $\exists N_0 \forall n > N_0 : ||a_n| - |a|| < |a|$  (לקחנו את הערך המוחלט של  $a$  להיות האפסילון).  
 לכן עבור  $n > N_0$  מתקיים ש- $|a| < 2|a_n|$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{a - a_n}{a_n a} \right| = \frac{|a - a_n|}{|a_n| |a|} \leq |a - a_n| \frac{2}{|a_n| |a|}$$

עפ"י הגדרת הגבול

$$\exists N \forall n > N : |a_n - a| \leq \epsilon \frac{|a|^2}{4}$$

מבאן שלכל  $n > N$

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a} \right| \leq |a_n - a| \frac{2}{|a_n| |a|} \leq \epsilon \frac{|a|^2}{4} \frac{2}{|a_n| |a|} = \epsilon \frac{|a|}{2|a_n|} < \epsilon \frac{2|a_n|}{2|a_n|} = \epsilon$$

□

### 3.1 אריתמטיקה של גבולות אינסופיים

#### 4.1 פעולות עם גבולות אינסופיים

משפט 6.1. אם  $x_n \rightarrow \pm\infty$ ,  $y_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = \pm\infty$  (בהתאם לגבול של  $x_n$ )

2. אם  $x_n \rightarrow \pm\infty$ ,  $y_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$  ו- $a \neq 0$  אזי  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \text{sign}(a) \cdot \pm\infty$  כאשר הסימן של  $a$  מוגדר להיות 1 אם הוא חיובי, -1 אם הוא שלילי ו-0 אם הוא 0.

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$  המשפטים הבאים:

$$3.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0 \wedge x_n > 0 \Rightarrow x_n \rightarrow \infty$$

$$3.2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0 \wedge x_n < 0 \Rightarrow x_n \rightarrow -\infty$$

הוכחה. 1. יהי  $M > 0$ . מהגדרת הגבול של  $y_n$  ידוע ש-

$$\exists n_1 \forall n > n_1 : a - 1 < y_n < a + 1$$

ומהגדרת השאיפה לאינסוף של  $x_n$  אנחנו יודעים ש-

$$\exists n_2 \forall n > n_2 : x_n > M - a + 1$$

ולכן אם נגדיר  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  אז יתקיים ש-

$$\forall n > n_0 : x_n + y_n > (M - a + 1) + (a - 1) = M$$

2. נוכיח עבור  $a$  חיובי, עבור  $a$  שלילי ההוכחה דומה מאוד והדבר היחיד כמעט שמשתנה זה סימני אי השיוויון:

יהי  $M > 0$ . מהגדרת הגבול של  $y_n$  ידוע ש-

$$\exists n_1 \forall n > n_1 : \frac{a}{2} < y_n < \frac{3a}{2}$$

ומהגדרת השאיפה לאינסוף של  $x_n$  אנחנו יודעים ש-

$$\exists n_2 \forall n > n_2 : x_n > \frac{2}{a}M$$

ולכן אם נגדיר  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  אז יתקיים ש-

$$\forall n > n_0 : x_n \cdot y_n > \frac{2}{a}M \cdot \frac{a}{2} = M$$

3. יהי  $\epsilon > 0$ . מהגדרת השאיפה לאינסוף של  $x_n$  אנחנו יודעים ש-

$$\exists n_0 \forall n > n_0 : x_n > \frac{1}{\epsilon}$$

אבל

$$\frac{1}{\epsilon} < |x_n| \Leftrightarrow \frac{1}{|x_n|} < \epsilon$$

וקיבלנו את הדרוש כי

$$\forall n > n_0 : \left| \frac{1}{x_n} \right| < \epsilon$$

3.1. נוכיח את 3.1 ו-3.2 מוכח באופן דומה: יהי  $M > 0$  אז  $\exists n_0 \forall n > n_0 \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M}$  ומכאן ש-  $\forall n > n_0 x_n > M$ .

□

## 5.1 מקרים של כל מקרה לגופו - אי הגדרה:

יהיו  $x_n, y_n$

1. אם  $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow -\infty$  אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של  $x_n + y_n$  (במילים אחרות, לא מוגדר  $(-\infty) + (\infty)$ )

2. אם  $x_n \rightarrow \infty, y_n \rightarrow 0$  אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של  $x_n \cdot y_n$  (במילים אחרות, לא מוגדר  $(\infty) \cdot 0$ )

3. אם שתי הסדרות שואפות ל-0 אז לא ניתן מהנתונים האלה בלבד לדעת את הגבול של  $\frac{x_n}{y_n}$  (במילים אחרות, לא מוגדר  $\frac{0}{0}$ )

**דוגמה 3.** כל זוג סדרות פה הוא דוגמה למקרה 1 אבל בכל זוג הגבול של הסכום שונה (ולפעמים לא קיים):

$$\begin{aligned} x_n &= n, y_n = 1 - n \\ x_n &= n^2, y_n = 2 - n^2 \\ x_n &= n^2, y_n = -n \\ x_n &= n, y_n = -n^2 \\ x_n &= n, y_n = (-1)^n - n \end{aligned}$$

**דוגמה 4.** כל זוג סדרות פה הוא דוגמה למקרה 2 אבל בכל זוג הגבול של המכפלה שונה (ולפעמים לא קיים):

$$\begin{aligned} x_n = n, y_n &= \frac{1}{n} \\ x_n = n^2, y_n &= \frac{2}{n^2} \\ x_n = n^2, y_n &= \frac{-1}{n} \\ x_n = n, y_n &= \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

$$x_n = n, y_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

**דוגמה 5.** אם ניקח כל זוג מהדוגמאות של מקרה 2 ונחליף את  $x_n$  בהופכי שלו, נקבל דוגמאות ל-3 (חשבו מה קורה במקרה זה ל- $\frac{y_n}{x_n}$ )

תרגיל: מהו  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ?  
פתרון:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

## 6.1 משפט הסנדוויץ'

**משפט 7** (משפט הסנדוויץ'). תהינה הסדרות  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  כך ש- $\forall n: a_n \leq x_n \leq b_n$  ובנוסף  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$  אזי הסדרה  $x_n$  מתכנסת והגבול שלה הוא  $L$ .

(שם המשפט נובע מכך שהסדרה האמצעית היא באמצע של מעין סנדוויץ' שיוצרות הסדרות  $a_n, b_n$  ששואפות לאותו גבול. פרופסור מרק אגרנובסקי מספר שברוסיה נהוג לקרוא למשפט הזה המשפט על שיכור ו-2 שוטרם משום שהסדרות  $a_n, b_n$  הן כמו שוטרם שהולכים למקום מסוים  $L$  וגורמים שיכור שהולך ביניהם  $x_n$  ללכת איתם לאותו מקום)

הוכחה. אם  $L = \infty$  אז פשוט עבור  $M > 0$  ידוע שיש  $n_0$  שמתקיים עבורו  $\forall n > n_0, a_n > M$  ואז גם  $x_n \geq a_n > M$ . באותו אופן אם  $L = -\infty$  אז נעשה אותו דבר רק עם העובדה ש- $x_n \leq b_n \leq M$ .  
אם  $L \in \mathbb{R}$ , יהי  $\varepsilon > 0$  ידוע אז ש-

$$\exists n_1 \forall n > n_1 : L - \varepsilon < a_n, \exists n_2 \forall n > n_2 : b_n < L + \varepsilon$$

ואז עבור  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  מתקיים ש- $\forall n > n_0 : L - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < L + \varepsilon$   
ומכאן, ש- $|x_n - L| < \varepsilon$  ואז לפי ההגדרה,  $x_n \rightarrow L$ .  $\square$

## 7.1 אי שיויונים של גבולות

**משפט 8.** נניח  $x_n \rightarrow L$  אזי

$$1. \text{ לכל } p < L \text{ קיים } n_1 \text{ כך ש-} x_n > p \text{ עבור } n > n_1$$

$$2. \text{ לכל } q > L \text{ קיים } n_2 \text{ כך ש-} x_n < q \text{ עבור } n > n_2$$

הוכחה. אם נציב בהגדרת הגבול של  $x_n = L$  את  $\varepsilon = L - p$  נוביח ישירות את 1 ואם נציב  $\varepsilon = q - L$  נוביח ישירות את 2.  $\square$

**מסקנה 9.** אם  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$  כש- $a < b$  אז  $\exists n_0 \forall n > n_0 x_n < y_n$  הוכחה. אם ניקח  $p = \frac{a+b}{2}$  שהוא בין  $a$  ל- $b$  אז לפי המשפט הקודם מתקיים:

$$\exists n_1 \forall n > n_1 : x_n < p, \exists n_2 \forall n > n_2 : y_n > p$$

ואז עבור  $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$  מתקיים ש- $x_n < p < y_n$ .

**מסקנה 10** (גבול שומר על אי שיוויון חלש). כלומר אם  $x_n \leq y_n$  אז  $x_n \rightarrow a, y_n \rightarrow b$  אז  $a \leq b$

הוכחה. נניח בשלילה ש- $a > b$  אזי מהמסקנה הקודמת  $\exists n_0 \forall n > n_0 y_n < x_n$  בסתירה לנתון.

**מסקנה 11** (גבול סדרה הוא יחיד). כלומר אם  $x_n \rightarrow L_1, x_n \rightarrow L_2$  אזי  $L_1 = L_2$

הוכחה. ולכן, מהמסקנה הקודמת,  $L_1 \leq L_2$  ובאותה דרך  $L_2 \leq L_1$ . מכאן ש-  
 $L_1 = L_2$