

0.1 הגדרת סדרה

הגדרה: סדרה היא פונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, כלומר התאמה בין המספרים הטבעיים למספרים הממשיים. לכל מספר טבעי מתאימים מספר ממשי. דוגמה לכך תהיה פונקציה שמתאימה את 1 ל-1, את 2 ל- $\frac{1}{2}$, את 3 ל- $\frac{1}{3}$ ובאופן כללי את n ל- $\frac{1}{n}$ (נהוג לסמן a_n במקום $f(n)$ בהקשר של סדרות ולכן פה $a_n = \frac{1}{n}$). כשאנחנו מתאימים את המספר הטבעי n למספר ממשי a_n , זה אומר אינטואיטיבית ש- a_n זה האיבר במקום ה- n . כך לדוגמה את הפונקציה שהתאימה את n ל- $\frac{1}{n}$ ניתן לראות בעצם כמה שאנחנו מכירים כסדרה:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

סימון מקובל לסדרות הוא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. גם סדרת מספרים אקראית היא סדרה, לא חייבת להיות חוקיות ברורה!

0.2 הגדרת הגבול

מתי נאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ "שואפת" או "מתכנסת" (למספר L ? באופן אינטואיטיבי הכוונה ברורה, הסדרה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ בבירור שואפת ל-0, הסדרה $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ לא מתכנסת לכלום והסדרה $100, 1000, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ עדיין שואפת ל-0 למרות שבהתחלה היא דווקא התרחקה ממנו קצת. אבל עדיין, איך ממש מגדירים את זה מתמטית?

הגדרה: שנאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ "שואפת" או "מתכנסת" (למספר L ונסמן $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ או $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$ אם $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n > N_\epsilon : |a_n - L| < \epsilon$. נכון שזה נראה מאוד

מפחיד במבט ראשון, אך בעצם זה גם דבר הגיוני. "בלשון בני אדם", ההגדרה אומרת שלכל מרחק שיתנו לי מהגבול, לא חשוב כמה קטן (זהו האפסילון), אני יכול למצוא מקום בסדרה (זהו ה- N_ϵ , מקום בסדרה שתלוי במרחק הקטן אפסילון שנתנו לי), שכל האיברים אחרי המקום ההוא (לכל המקומות $n > N_\epsilon$ מקיימים שהמרחק שלהם מהגבול $|a_n - L|$) זה המרחק בין האיבר a_n לגבול L (קטן מאפסילון, המרחק ההתחלתי הקטן).

לדוגמה, במקרה של $a_n = \frac{1}{n}$, נרצה להוכיח שזה שואף ל-0. כלומר לכל מרחק מ-0, לא חשוב כמה קטן (אפסילון), אמצא מקום בסדרה שכל האיברים אחריו מקיימים ש- $|a_n - 0| < \epsilon$ (המרחק בין האיבר לגבול, 0, קטן מאפסילון). לדוגמה, אם מישוהו יתן לי את המרחק $\epsilon = 0.0001$, אם נסתכל על האיבר במקום ה- $N = 10000$, המרחק בין האיברים שבאים אחריו לבין 0 יהיה קטן מ-0.0001 (אפסילון). איך נוכיח אז שזה עובד לכל אפסילון?

יהי אפסילון גדול מ-0 (מישהו נתן לי מרחק ממש קטן, אולי $\epsilon = 0.0000001$ או אולי $\epsilon = 10^{-10000}$ או אולי אפילו קטן יותר). אנחנו צריכים למצוא N שלכל $n > N$, $|a_n - 0| < \epsilon$, אבל זה בדיוק אומר ש- $|\frac{1}{n}| < \epsilon$, וזה קורה אם $n > \frac{1}{\epsilon}$ (העברת אנגפים פשוטה). לכן אם ניקח N שגדול מאחד חלקי אפסילון, יתקיים שלכל האיברים אחריו, המרחק ביניהם ל-0 קטן מאפסילון. בדיוק מה שהיינו צריכים להוכיח!

0.3 גבולות אינסופיים

ראינו מה קורה לגבי סדרות ששואפות למספר, אבל לפעמים נוח להגיד שסדרה "שואפת לאינסוף", כמו במקרה של $1, 2, 3, 4, \dots$. מתי נגיד שזה מתקיים? אם הסדרה מצליחה בסופו של דבר לעקוף כל מספר, לא חשוב כמה הוא גדול. במובנים מתמטיים, זה אומר (שכל M מספר גדול) קיים מקום בסדרה N שכל האיברים אחריו (לכל $n > N$, הסדרה תהיה גדולה יותר מהמספר הגדול M). בשפת כמתים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \in \mathbb{N} : a_n > M$$

באותו אופן, אפשר להגדיר שאיפה למינוס אינסוף:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \in \mathbb{N} : a_n < M$$