1 אלגברה לינארית 2 – הקדמה

בקורס הקודם, "אלגברה לינארית 1", פיתחתם כלים טכניים לעבודה עם מטריצות, עם מרחבים וקטוריים ועם העתקות לינאריות: למדתם למצוא מהם המרחבים של מטריצה (מרחב העמודות, מרחב השורות ומרחב האפס); לחשב מימד של מרחב וקטורי (שזה, בעצם, מה המספר הכי קטן של וקטורים שצריך ממנו כדי שנוכל להגיע לכל המרחב); למצוא וקטורי קואורדינטות לפי בסיס; למצוא מטריצה מייצגת העתקה; למצוא דטרמיננטה של מטריצה – ועוד.

שאלה לדוגמה היא "נתונה העתקה לינארית... ונתון בסיס סדור... מצא את המטריצה המייצגת של ההעתקה ביחס לבסיס". בקורס הזה, אלגברה לינארית 2, נלמד כיצד בדאי לבחור את הבסיס (בהינתן ההעתקה הלינארית), כדי שנוכל "להבין" את ההעתקה טוב יותר.

למה הכוונה? נסתכל, למשל, על ההעתקה הלינארית $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x + 4y \\ 4x + 3y \end{pmatrix}$$

ביחס לבסיס הסטנדרטי,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הינה

$$[T]_S = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

ואין לנו מושג קלוש מה ההעתקה הזו באמת עושה.

אבל (!) אם נבחר את הבסיס

$$B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נקבל שהמטריצה המייצגת הינה

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה אלכסונית, ולכן נוכל להבין יותר טוב את ההעתקה: כל וקטור ניתן להצגה (יחידה) על ידי צירוף לינארי של איברי הבסיס B. בעצם, אפשר לבחור אותם להיות מערכת צירים של המרחב $\mathbb{R}^2$. אם כן, לכל וקטור יש "רכיב" בכיוון v_1 ו"רכיב" בכיוון v_2. ההעתקה T מותחת כל רכיב כזה פי 5, והופכת את הרכיב של v_2.

כלומר, מתוך המטריצה המייצגת ביחס לבסיס מסוים, הצלחנו להבין יותר טוב מה ההעתקה עושה. בחלקו הראשון של הקורס נבדוק מתי נוכל למצוא להעתקה בסיס כזה, שעבורו המטריצה המייצגת תהיה אלכסונית, ואז נוכל להבין את ההעתקה. לא תמיד נוכל לעשות זאת, ולכן ננסה למצוא צורות אחרות שכן נוכל (למשל, מטריצה משולשת עליונה או תחתונה).

חשוב לציין שבקורס הקודם הוכחתם שקילות בין מטריצות לבין העתקות לינאריות, על ידי המטריצות המייצגות. בקורס הזה נשחק עם השקילות הזו מספר גדול של פעמים, וכל דבר שנוכיח, למשל, למטריצות – יהיה נכון באמצעות השקילות להעתקות לינאריות (גם ההפך נכון – אם נוכיח משהו להעתקות לינאריות – הוא אוטומטית נכון גם למטריצות).

בחלק השני של הקורס נסתכל על כל המרחבים הווקטוריים מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$, ונגדיר עליהם "גיאומטריה", כלומר – אורך של וקטורים וזווית בין שני וקטורים (שאינם אפס ומעל הממשיים). לאורך נקרא גם "נורמה".

למשל, נסתכל על מרחב פחות אינטואיטיבי, כמו מרחב הפונקציות הרציפות מ-$[0,1]$ ל-$\mathbb{R}$, נסמנו V. אנו נאמר שאחת הדרכים להגדיר עליו אורך היא בדרך הבאה: בהינתן פונקציה $f(x)$, נגדיר את האורך שלה להיות

$$\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,\mathsf{d}x}$$

ואת הזווית בין $f(x)$ ל-$g(x)$ להיות

$$\arccos\left(\frac{\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathsf{d}x}{\sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,\mathsf{d}x}\sqrt{\int_0^1 g^2(x)\,\mathsf{d}x}}\right)$$

למשל, האורך של $f(x)=x$ הוא $\frac{1}{3}$, והזווית בין הפונקציה הזו לבין $g(x)=x^2$ הינה $\arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)=14.477°$.

באמצעות המושגים האלו נוכל לתאר מושגים מוכרים מהגיאומטריה, כמו מתי שני וקטורים מאונכים זה לזה, ונוכיח שלכל מרחב מעל אחד השדות הנ"ל ניתן לבחור מערכת צירים, כך שהצירים יהיו מאונכים זה לזה (ועל כל אחד ניתן לבחור וקטור יחידה – כלומר מאורך 1). נגדיר מושגים נוספים המוכרים מגיאומטריה, כמו היטל של וקטור על תת-מרחב.

אם נחזור לדוגמה הקודמת, שני וקטורים מאונכים אם ורק אם הזווית ביניהם היא $90°$ אם ורק אם

$$\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathsf{d}x=0$$

למשל, הפונקציה $f(x)$ מאונכת ל-$g(x)=3x-2$ (לא בדיוק מה שאנחנו רגילים אליו, אבל הכל תלוי בהגדרה).

בסיום הקורס נחקור מעט העתקות לינאריות ממרחב וקטורי לשדה שמעליו אנו עובדים, כלומר שלכל וקטור אנו מתאימים סקלר (באופן לינארי).