

מודל

הערה בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא ומספר ת"ד.

למה 1. הראו כי תחום שלמות לא נשמר תחת מכפלה ישרה. כלומר אם R, S הם תחומי שלמות, אזי המכפלה הישרה $R \times S$ היא לא בהכרח תחום שלמות.

משפט 2. יהי חוג R . נאמר כי תת־חבורה חיבורית $S \subseteq R$ הכוללת את איבר היחידה וסגורה לפעולת הכפל של R היא תת־חוג (עם יחידה) של R .

1. הראו שאוסף המטריצות $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C} \right\}$ הוא חוג (לגבי חיבור וכפל מטריצות), אבל אינו תת־חוג של חוג המטריצות $M_2(\mathbb{C})$.

2. הוכיחו שתת־חוג של תחום שלמות הוא תחום שלמות.

3. מצאו דוגמה לתת־חוג של שדה שאינו שדה.

שאלה 1. יהי R חוג.

1. נניח R תחום שלמות. הוכיחו כי גם חוג הפולינומים $R[x]$ הוא תחום שלמות.

2. החוג $R[[x]]$ של טורי חזקות פורמליים כולל את הסכומים האינסופיים $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, כאשר $a_i \in R$, עם פעולות החיבור והכפל הטבעיים שמכלילות את אלו של הפולינומים. הוכיחו כי $R[x]$ הוא תת־חוג של $R[[x]]$.

שאלה 2. הוכיחו כי כל שדה הוא תחום שלמות. בנוסף, מצאו תחום שלמות שאינו שדה. (רשות) בכיוון ההפוך הוכיחו כי כל תחום שלמות סופי הוא שדה.

בהצלחה!