עד כה הגדרנו רציפות באופן נקודתי ואמרנו שפונקציה רציפה בקטע אם היא רציפה בכל נקודה בקטע בנפרד.

באופן אינטואיטיבי, אומרים כי פונקציה מתכנסת 'יותר מהר' אל הגבול שלה, אם הדלתא הנדרש לאפסילון הוא גדול יותר (כלומר הפונקציה קרובה לגבול בתחום יותר רחב). אנו רוצים להגדיר פונקציות אשר מהירות ההתכנסות שלהן דומה בכל נקודה בקטע מסויים.

הגדרה 1. פונקציה f נקראת רציפה במידה שווה (רציפה במ"ש) בקטע A אם:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x_1,x_2\in A:|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

שימו לב כי ברציפות רגילה בקטע A, לכל נקודה בקטע ההתאמה של הדלתא לאפסילון עשוייה להיות שונה. כאשר הפונקציה רציפה במ"ש, לכל אפסילון יש דלתא המתאים לכל הקטע A.

דוגמה 1. הפונקציה $f(x)=x$ רציפה במ"ש על כל ציר הממשיים.
אכן, לכל אפסילון ניקח דלתא שווה לאפסילון ונקבל כי $|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|<$ $\delta=\epsilon$

דוגמה 2. לפעמים פונקציה מסויימת עשוייה להיות רציפה במ"ש בקטע מסויים אך לא רציפה במ"ש בקטע אחר. ראשית, נביט ב $f(x)=x^2$ על הקטע הסופי (a,b). יהי $\varepsilon>0$, אזי:

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^2-x_2^2|=|(x_1-x_2)(x_1+x_2)|\leq|x_1-x_2|\cdot2\max\{|a|,|b|\}$$

בעת, אם ניקח $\delta=\frac{\epsilon}{2\max\{|a|,|b|\}}$ נקבל שהפונקציה רבמ"ש בתחום.
עכשיו, נבחן את אותה הפונקציה $f(x)=x^2$ על כל הממשיים, ונוכיח כי היא אינה רציפה שם במ"ש. ניקח $\epsilon=1$. צריך להוכיח כי לכל $\delta>0$ קיים זוג מספרים ממשיים המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ וגם $|f(x_1)-f(x_2)|\geq1$.
ניקח $x_2=x_1+\frac{\delta}{2}$ ונראה כי אם נבחר את x_1 להיות גדול מספיק, נקבל את הדרוש. ברור כי $|x_1-x_2|=\frac{\delta}{2}<\delta$

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1^2-x_2^2|=|(x_1-x_2)(x_1+x_2)|=\frac{\delta}{2}|2x_1+\frac{\delta}{2}|$$

ברור שאם נגדיל את x_1 מספיק נקבל את הדרוש.

משפט 1. *אם f רציפה במ"ש ב- A אזי רציפה שם.*

הוכחה. יהי $x_0\in A$, נרצה להראות ש- f רציפה בו. כלומר

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta\forall x:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

אבל ידוע מהנתון שלכל אפסילון קיים דלתא כך שהתנאי נכון לכל x_1,x_2 שמרחקם זה מזה קטן מ- δ , בפרט ל- x,x_0 . □

משפט 2. *אם f,g רבמ"ש ב-A אזי לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ מתקיים ש- $\alpha f+\beta g$ רבמ"ש ב-A.*
שימו לב, כפל אינו רציף במ"ש בהכרח, לדוגמא $x^2=x\cdot x$, כאשר הפונקציה משמאל אינה רציפה במ"ש על כל הממשיים, ואילו הפונקציות מימין כן.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. אזי ידוע שקיימים δ_1, δ_2 כך ש-

$$\forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta_1 \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$$

$$\forall x_1, x_2 : |x_1 - x_2| < \delta_2 \Rightarrow |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$$

נגדיר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. יהיו x_1, x_2 כך ש- $|x_1 - x_2| < \delta$. נראה כי

$$|\alpha f(x_1)+\beta g(x_1)-(\alpha f(x_2)+\beta g(x_2))| \leq |\alpha|\cdot|f(x_1)-f(x_2)|+|\beta|\cdot|g(x_1)-g(x_2)| < |\alpha|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + \beta\frac{\varepsilon}{2|\beta|} = \varepsilon$$

$\square$

משפט 3. *פונקציה f אינה רציפה במ"ש בקטע A אמ"ם קיים זוג סדרות (עם איברים מ-A) המקיימות:*

$$|x_n - y_n| \to 0$$

וגם

$$|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$$

הוכחה. אם הפונקציה אינה רציפה במ"ש אזי קיים אפסילון גדול מאפס כך שלכל דלתא גדול מאפס יש זוג מספרים בקטע במרחק קטן מדלתא, כך שהפרש התמונות בינהם גדול או שווה לאפסילון.

ניקח סדרת דלתאות כלשהי השואפת לאפס. הסדרות המורכבות מהזוגות המותאמים לדלתאות מקיימות את הדרוש.

בכיוון ההפוך, אם יש זוג סדרות כזה, כיוון שסדרת ההפרשים בין התמונות אינה שואפת לאפס יש לה תת סדרה שמתכנסת למספר שונה מאפס (הגבול העליון). תת הסדרות המתאימות של הזוגות יספקו זוג מתאים לכל דלתא, כאשר האפסילון יהיה חצי מגבול סדרת ההפרשים.

$\square$

משפט 4. *נניח $f : A \to B$ רבמ"ש ו- $g : B \to \mathbb{R}$ רבמ"ש אזי $h = g \circ f$ רבמ"ש*

הוכחה. תהיינה x_n, y_n סדרות של נק' כך ש- $|x_n - y_n| \to 0$. f רבמ"ש ולכן $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$ אבל גם g רבמ"ש ולכן $|g(f(x_1)) - g(f(x_2))| = |h(x_1) - h(x_2)| \to 0$. מהשלילה של אחת הטענות הקודמות נקבל ש- h רבמ"ש. $\square$

משפט 5. *פונקציה מחזורית הרציפה על כל הממשיים, רציפה במ"ש על כל הממשיים.*

שימו לב: פונקציה נקראת מחזורית אם קיים מספר ממשי p כך שלכל x ממשי מתקיים:

$$f(x + p) = f(x)$$

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$

נקבע x_0 ונראה ש- f רבמ"ש ב- $[x_0, x_0 + 2p]$ ולכן קיים $\delta > 0$ כך שהגדרת הרציפות במ"ש מתקיימת.

בעת עבור $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש- $|x_1 - x_2| < \delta$ נשים לב ש- $|f(x_1) - f(x_2)|$ לא ישתנה אם נזיז את x_1, x_2 כל פעם p ימינה או שמאלה על ציר המספרים עד שיגיעו ל- $[x_0, x_0+2p]$ ושם ידוע שהמרחק בין ערכי הפונקציה קטן מאפסילון, לכן סיימנו.

$\square$

בעתיד, כשנלמד על נגזרות נראה שיש עוד דרך להוכיח רציפות במ"ש.