

ראינו במשפט פרמה שאם f גזירה בנקודת קיצון אז הנגזרת היא 0 אבל זה לא אומר שאם הנגזרת היא 0 הנק' היא נק' קיצון. לדוגמה עבור $f(x) = x^3$ אז $f'(0) = 0$ אבל $x = 0$ לא נק' קיצון. הכלל הבא עוזר לפתור הרבה בעיות מהסוג הזה:

משפט 1. נניח $f \in D^n(a, b)$ וב- $x_0 \in (a, b)$ מתקיים ש- $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ אבל $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. אז אם n אי זוגי אין נק' קיצון ב- x_0 , אם n זוגי והנגזרת ה- n היא חיובית אז x_0 מינימום ואם הנגזרת ה- n היא שלילית אז ב- x_0 נק' מקסימום.

הוכחה. מתקיים ש-

$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \varepsilon(x) \cdot (x-x_0)^n$ where $\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$ אם נעביר אגפים יתקיים

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) \right)$$

מהגדרת הפונקציה אפסילון נקבל שקיים δ כך ש-

$\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varepsilon(x)| < \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right|$ ולכן הסימן של $\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) \right)$ זהה לסימן של $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.
 כעת נחזור לכך ש-

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) \right)$$

נניח n אי זוגי אז נראה שעבור x ים מצדדים שונים של x_0 הסימן של $f(x) - f(x_0)$ ישתנה בהתאם ומכאן שלא נק' קיצון.

נניח n זוגי אז $f(x) - f(x_0) \geq 0 \Rightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x) > 0 \Rightarrow f^{(n)}(x_0) > 0$ ואז x_0 נק' מינימום. עבור נגזרת n היא שלילית נקבל מקסימום באופן דומה. \square