

**משפט 1.** תהי  $f \in D(a, b)$  אזי

1.  $\forall x : f'(x) \geq 0$  אם ורק אם  $f$  מונוטונית עולה

2.  $\forall x : f'(x) \leq 0$  אם ורק אם  $f$  מונוטונית יורדת

3.  $\forall x : f'(x) > 0$  אזי  $f$  מונוטונית עולה ממש  
(המשפט ההפוך לא נכון, לדוגמה  $f(x) = x^3$  מפריכה)

4.  $\forall x : f'(x) < 0$  אזי  $f$  מונוטונית יורדת ממש  
(המשפט ההפוך לא נכון, לדוגמה  $f(x) = -x^3$  מפריכה)

הוכחה. קודם כל נוכיח את  $\Leftarrow$  עבור המשפט הראשון ועבור השאר הכיוון הזה מוכח באופן דומה:

יהיו  $x_1, x_2 \in (a, b)$  ובה"כ נניח  $x_1 \leq x_2$  אז לפי לגרנז'  $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  עבור  $c \in (x_1, x_2)$ . אבל  $f'(c) \geq 0$  וגם המכנה חיובי ומכאן ש-  $f(x_2) \geq f(x_1)$ .  
כעת עבור  $\Rightarrow$  שוב נוכיח עבור המשפט הראשון ועבור המשפט השני באופן דומה:

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

אבל גם המונה אי שלילי (מהנתון) והמכנה חיובי ומכאן ש-  $f'(x) \geq 0$

□