הגדרה 1. תהי $f \in D^{\infty}(a,b)$ אזי אפשר להגדיר את $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ להיות טור הטיילור של f סביב x_0 .

משפט 1. *אם* $\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$ *אזי* $f(x)$ *שווה לטור הטיילור שלה.*

הוכחה.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x) - R_n(x,x_0) = f(x) - 0 = f(x)$$

□

תהי $f \in D^{\infty}(a,b)$ כך ש- $\exists M : \forall x \in (a,b), n \in \mathbb{N} : |f^{(n)}(x)| < M$ אזי f שווה לטור הטיילור שלה.

הוכחה. לפי לגרנז' לכל $x \in (a,b)$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $c \in [x_0,x] \cup [x,x_0]$ כך ש-

$$|R_n(x,x_0)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \le M \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ומהמשפט הקודם נקבל את הדרוש. □

דוגמה 1. פונקציה שמתכנסת לטור הטיילור שלה רק בנקודת הפיתוח:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

נראה כי $f \in D^{\infty}(-\infty,\infty)$ ו- $\forall n : f^{(n)}(0) = 0$. מכאן שטור הטיילור שלה הוא $\sum 0 = 0$, אבל $f(x) = 0$ רק ב- $x = 0$. התכונה המיוחדת של הפונקציה הזאת גורמת לה להיות הנחיתה המושלמת של מטוס, משום שב- $t = 0$ היא על הקרקע, המהירות היא 0, התאוצה היא 0, השינוי בתאוצה היא 0, וכן הלאה...

דוגמה 2. נזכור ש- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ עבור $|x| < 1$ ולכן אם נציב במקום x את $-x^2$ נקבל ש- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ וממשפט היחידות נסיק שזהו טור הטיילור של הפונקציה. נשאלת השאלה: אם הפונקציה הזו מוגדרת וגזירה אינסוף פעמים בכל $\mathbb{R}$, מדוע תחום ההתכנסות שלה הוא עדיין $|x| < 1$? הרי ב- $\frac{1}{1-x}$ היה ברור שאם נציב $x = 1$ נקבל מצב של אי הגדרה, אבל פה לכאורה אין שום סינגולריות במרחק 1 מ- $x_0 = 0$. בקורסים מתקדמים יותר (העוסקים במרוכבים) נראה שבעצם כן יש וזה מה שעוצר את הטור מלהתכנס בטווח רחב יותר.