1 המרחב הדואלי

תזכורת:

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל השדה $\mathbb{F}$. נתבונן ב-$\mathbb{F}$ בתור מרחב וקטורי מעל עצמו ($\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{F} = 1$, $\{1\}$ בסיס). אומרים שהעתקה לינארית $\varphi : V \to \mathbb{F}$ היא **פונקציונל לינארי על V**.

הגדרה 2. $V^* = \{\varphi : V \to \mathbb{F}$ אוסף כל הפונקציונלים הלינאריים$\}$ נקרא **המרחב הדואלי** ל-V. מגדירים עליו פעולות חיבור וכפל בסקלר, כך שהוא הופך למרחב וקטורי, בצורה הבאה:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(v) = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) \quad (\alpha\varphi)(v) = \alpha\varphi(v)$$

הערה 1. $\dim V^* = n$, ולכן V^* איזומורפי ל-V.

בעת נרצה לכל בסיס להתאים בסיס במרחב הדואלי, "בסיס דואלי". ההתאמה הזו תייצר לנו בהמשך את האיזומורפיזם בין המרחב למרחב הדואלי.

הגדרה 3. יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס של V. נגדיר בסיס $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ של V^*, שייקרא **הבסיס הדואלי ל-B**, על ידי

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

לכל $i = 1, \ldots, n$, ולכל $j = 1, \ldots, n$, ונמשיך כל φ_i לפי לינאריות. כלומר, אם ניקח וקטור כלשהו $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, אזי

$$\varphi_i(v) = \alpha_1 \underbrace{\varphi_i(v_1)}_{0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\varphi_i(v_n)}_{0} = \alpha_i$$

מההגדרה קיבלנו את הנוסחה

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_n(v) \end{pmatrix}$$

נוודא כעת שהבסיס הדואלי הוא אכן בסיס.

בת"ל נניח כי $\alpha_1\varphi_1 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = 0$.

נתבונן בערך של שני הצדדים עבור הווקטור v_i:

$$\alpha_1 \underbrace{\varphi_1(v_i)}_{0} + \cdots + \alpha_i \underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\varphi_n(v_i)}_{0} = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

לכן B^* בת"ל. $\dim V^* = n$, וכן $|B^*| = n$, ולכן B^* בסיס של V^*. בעיקרון, נוכל להפסיק פה, אך כעת, באמצעות הפרישה, נפתח נוסחה חשובה:

פורשת אם $\varphi \in V^*$, אזי $\varphi = \varphi(v_1)\varphi_1 + \cdots + \varphi(v_n)\varphi_n$.

בדיקה: נציב v_i בשני הצדדים, ונקבל:

$$\varphi(v_1)\underbrace{\varphi_1(v_i)}_{0} + \cdots + \varphi(v_i)\underbrace{\varphi_i(v_i)}_{1} + \cdots + \varphi(v_n)\underbrace{\varphi_n(v_i)}_{0} = \varphi(v_i)$$

אם כן, נקבל נוסחה חשובה נוספת:

$$[\varphi]_{B^*} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

הערה 2. ציינו שתי נוסחאות חשובות קודם, ובעזרתן נבנה איזומורפיזם מפורש $V \to V^*$. ניקח בסיס B של V. נניח שנתון $v \in V$, כך שווקטור הקואורדינטות שלו ביחס לבסיס B הוא

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \vdots \\ \varphi_n(v) \end{pmatrix}$$

נשלח את v ל-φ, כך שווקטור הקואורדינטות של φ לפי B^* זהה לווקטור הקואורדינטות של v לפי B, ז"א

$$[\varphi]_{B^*} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_n) \end{pmatrix}$$

אם כן, הקונסטרוקציה של האיזומורפיזם תלויה בבחירת הבסיס B; בחירות שונות של בסיסים יובילו לאיזומורפיזמים שונים.

נרצה לראות כיצד שינוי הבסיס משפיע על הבסיס הדואלי, ונמצא קשר בין מטריצות המעבר המתאימות.

משפט 1. *יהיו $B, \tilde{B}$ בסיסים של V, יהיו $B^*, \tilde{B}^*$ הבסיסים הדואליים המתאימים של V^*, תהי C מטריצת המעבר מ-B ל-$\tilde{B}$ ותהי C' מטריצת המעבר מ-B^* ל-$\tilde{B}^*$. אזי $C' = \left(C^{-1}\right)^t = \left(C^t\right)^{-1}$.*

הוכחה. נוכיח שמטריצת המעבר מ-$\tilde{B}^*$ ל-B^* שווה ל-C^t. נסמן מטריצה זו ב-$C'' = (C')^{-1}$.

נסמן $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\tilde{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$, $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, $\tilde{B}^* = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. אזי

$$C'' = \begin{pmatrix} | & & | \\ [\varphi_1]_{\tilde{B}^*} & \cdots & [\varphi_n]_{\tilde{B}^*} \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \cdots & \varphi_n(w_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(w_n) & \cdots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} - & ([w_1]_B)^t & - \\ & \vdots & \\ - & ([w_n]_B)^t & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [w_1]_B & \cdots & [w_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}^t = C^t$$

הוכחנו $C'' = C^t$, ולכן $C' = (C'')^{-1} = (C^t)^{-1}$.

$\square$

2 המרחב הדואלי השני

הגדרה 4. $V^{**}=\left(V^{*}\right)^{*}$ נקרא **המרחב הדואלי השני ל-V**.

הערה 3. $\dim V=\dim V^{*}=\dim V^{**}$, ולכן $V\cong V^{**}$.

הערה 4. נחפש איזומורפיזם מהמרחב למרחב הדואלי השני. הפעם, לעומת האיזומורפיזם מהמרחב לדואלי שלו, אפשר לבנות איזומורפיזם זה בלי לבחור בסיס ב-V – איזומורפיזם טבעי.

נגדיר לכל $\varphi\in V^{*}$, $\hat{v}\left(\varphi\right)=\varphi\left(v\right)$ (**איזומורפיזם ההצבה**).
בדיקות:

1. נבדוק כי $\hat{v}\in V^{**}$.

$$\hat{v}\left(\alpha\varphi_{1}+\beta\varphi_{2}\right)=\left(\alpha\varphi_{1}+\beta\varphi_{2}\right)\left(v\right)=\alpha\varphi_{1}\left(v\right)+\beta\varphi_{2}\left(v\right)=\alpha\hat{v}\left(\varphi_{1}\right)+\beta\hat{v}\left(\varphi_{2}\right)$$

2. נסמן $E:V\to V^{**}$, כאשר $E\left(v\right)=\hat{v}$. נבדוק ש-E איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

לינאריות נבדוק האם $E\left(\alpha v_{1}+\beta v_{2}\right)=\alpha E\left(v_{1}\right)+\beta E\left(v_{2}\right)$. נחשב את הערך של שני הצדדים עבור איזשהו $\varphi\in V^{*}$:

$$E\left(\alpha v_{1}+\beta v_{2}\right)\left(\varphi\right)=\left(\widehat{\alpha v_{1}+\beta v_{2}}\right)\left(\varphi\right)=\varphi\left(\alpha v_{1}+\beta v_{2}\right)=\alpha\varphi\left(v_{1}\right)+\beta\varphi\left(v_{2}\right)=$$

$$=\alpha\hat{v_{1}}\left(\varphi\right)+\beta\hat{v_{2}}\left(\varphi\right)=\left(\alpha\hat{v_{1}}+\beta\hat{v_{2}}\right)\left(\varphi\right)=\left(\alpha E\left(v_{1}\right)+\beta E\left(v_{2}\right)\right)\left(\varphi\right)$$

חח"ע נבדוק ש-E חח"ע, כלומר $\ker E=0$. יהי $v\in\ker E$, ז"א $\hat{v}=0$. נגדיר $B=\left\{ v_{1},\ldots,v_{n}\right\}$ בסיס של V, ויהי $B^{*}=\left\{ \varphi_{1},\ldots,\varphi_{n}\right\}$ הבסיס הדואלי.
נשים לב כי לכל $i=1,\ldots,n$ מתקיים $\varphi_{i}\left(v\right)=\hat{v}\left(\varphi_{i}\right)=0$, ולכן $\left[v\right]_{B}=0$, כלומר $v=0$.

ממשפט המימדים, נקבל ש-E העתקת על, ז"א E איזומורפיזם.

כל בסיס של V^{*} הוא דואלי לבסיס של V.

הוכחה. יהי B' בסיס של V^{*}, נסמן $B'=\left\{ \varphi_{1},\ldots,\varphi_{n}\right\}$. נתבונן בבסיס $B''=\left\{ e_{1},\ldots,e_{m}\right\}$ של V^{**} הדואלי ל-B'. ז"א, מתקיים $e_{i}\left(\varphi_{j}\right)=\delta_{ij}$. נגדיר $v_{i}=E^{-1}\left(e_{i}\right)$, כאשר $E^{-}1:V^{**}\to V$ הוא האיזומורפיזם ההפוך ל-E שהגדרנו. נגדיר $B=\left\{ v_{1},dots,v_{n}\right\}$, ונוכיח $B^{*}=B'$. אכן, מתקיים

$$\varphi_{j}\left(v_{i}\right)=\hat{v}_{i}\left(\varphi_{j}\right)=e_{i}\left(\varphi_{j}\right)=\delta_{ij}$$

□

3 מאפס

הגדרה 5. יהי V מרחב וקטורי, ותהי $S\subseteq V$ תת-קבוצה. נגדיר

$$S^{0}=\left\{ \varphi\in V^{*}\mid\forall v\in S:\varphi\left(v\right)=0\right\}$$

בלומר, זה אוסף כל הפונקציונלים הלינאריים המתאפסים על כל S. אזי S^{0} נקרא **המאפס של** S.

הערה 5. תבונות המאפס:

1. $V^{*} \subseteq S^{0}$ הוא תת-מרחב.

הוכחה. אם $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, ואם $\varphi_{1},\varphi_{2}\in S^{0}$, אזי לכל $v\in S$ מתקיים

$$\left(\alpha\varphi_{1}+\beta\varphi_{2}\right)\left(v\right)=\alpha\varphi_{1}\left(v\right)+\beta\varphi_{2}\left(v\right)=0$$

□

2. $S^{0}=\left(\mathrm{Span}\,S\right)^{0}$

הוכחה. נוכיח באמצעות הכלה דו-כיוונית.

$\boxed{\supseteq}$ ההכלה הזו ברורה, כי אם $\varphi\in\left(\mathrm{Span}\,S\right)^{0}$, אזי לכל $v\in\mathrm{Span}\,S$ מתקיים $\varphi\left(v\right)=0$, ובפרט זה נכון עבור $v\in S$.

$\boxed{\subseteq}$ יהי $\varphi\in S^{0}$, ויהי $v\in\mathrm{Span}\,S$. נסמן $v=\alpha_{1}v_{1}+\cdots+\alpha_{k}v_{k}$, כאשר $v_{1},\ldots,v_{k}\in S$. אזי

$$\varphi\left(v\right)=\varphi\left(\alpha_{1}v_{1}+\cdots+\alpha_{k}v_{k}\right)=\alpha_{1}\varphi\left(v_{1}\right)+\cdots+\alpha_{k}\varphi\left(v_{k}\right)=0$$

וקיבלנו הדרוש.

□

3. אם $U\subseteq V$ תת-מרחב, אזי $\dim U+\dim U^{0}=\dim V$.

הוכחה. ניקח בסיס $B'=\left\{ v_{1},\ldots,v_{k}\right\}$ של U, ונשלים אותו לבסיס $B=\left\{ v_{1},\ldots,v_{k},v_{k+1},\ldots,v_{n}\right\}$ של V. נסמן $B^{*}=\left\{ \varphi_{1},\ldots,\varphi_{n}\right\}$ הבסיס הדואלי של B. נסתכל על הפונקציונלים $\left\{ \varphi_{k+1},\ldots,\varphi_{n}\right\}$, ונוכיח שהם בסיס של U^{0}. לצורך כך, נוכיח שהם קבוצה בת"ל ופורשת.

הם בבירור בת"ל, כחלק מבסיס.

נוסיף להם פונקציונל $\psi=\alpha_{1}\varphi_{1}+\cdots+\alpha_{n}\varphi_{n}\in U^{0}$. אזי לכל $i=1,\ldots,k$ נקבל

$$0=\psi\left(v_{i}\right)=\alpha_{1}\underbrace{\varphi_{1}\left(v_{i}\right)}_{0}+\cdots+\alpha_{i}\underbrace{\varphi_{i}\left(v_{i}\right)}_{1}+\cdots+\alpha_{n}\underbrace{\varphi_{n}\left(v_{n}\right)}_{0}=\alpha_{i}$$

ולכן ψ נפרש על ידי $\left\{ \varphi_{k+1},\ldots,\varphi_{n}\right\}$.

לסיכום, נקבל

$$\dim U+\dim U^0=|B'|+|\{\varphi_{k+1},\dots,\varphi_n\}|=k+(n-k)=n=\dim V$$

$\square$

4. לכל $U\subseteq V$ תת-מרחב, $U^{00}=E\left[U\right]=\{\hat{u}\mid u\in U\}$.

הוכחה. $\boxed{\subseteq}$ יהי $v\in E\left[U\right]$, אזי קיים $u\in U$ שעבורו $\hat{u}=E\left(u\right)=v$. יהי $\varphi\in U^0$ פונקציונל לינארי. אזי $\hat{u}\left(\varphi\right)=\varphi\left(u\right)=0$, ולכן $v=\hat{u}\in U^{00}$.

שוויון מימדים לפי תבונה 3, $\dim U+\dim U^0=\dim V$, אבל גם $\dim U^0+\dim U^{00}=\dim V$. לכן, המימדים שלהם שווים; $\dim U=\dim U^{00}$. איזומורפיזם שומר על המימד, ולכן $\dim U=\dim E\left[U\right]$. בסך הכל, $\dim U^{00}=\dim E\left[U\right]$.

הוכחנו הכלה ושוויון מימדים, ולכן יש שוויון.

$\square$