משפט 1. *נניח* $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)_{x\to x_0} = Q(x) + o((x-x_0)^n)_{x\to x_0}$ *כאשר* P, Q *פולינומים מדרגה קטנה או שווה ל-* n *אזי* $P(x) = Q(x)$

הוכחה.

$$P(x)+o((x-x_0)^n)_{x\to x_0} = Q(x)+o((x-x_0)^n)_{x\to x_0} \Rightarrow P(x)-Q(x) = o((x-x_0)^n)_{x\to x_0}$$

$$P(x) = p_0+p_1(x-x_0)+p_2(x-x_0)^2+\cdots p_n(x-x_0)^2, Q(x) = q_0+q_1(x-x_0)+\cdots q_n(x-x_0)^n \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n}(p_k-q_k)x^k = o((x-x_0)^n)_{x\to x_0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{(p_0-q_0)+(p_1-q_1)(x-x_0)+\cdots(p_n-q_n)(x-x_0)^n}{(x-x_0)^n} = 0$$

אבל הגבול הזה קיים רק אם כל המקדמים (חוץ מהאחרון) של $x-x_0$ הם אפסים והגבול מתאפס אם המקדם האחרון הוא 0. לסיכום $p_k - q_k = 0$ ואז $p_k = q_k$.
לבן $P(x) = Q(x)$ □

משפט 2. *נניח* $f \in D^n(a,b)$ *וקיים פולינום* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x-x_0)^k$ עבור $x_0 \in (a,b)$ *כך ש-* $f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)_{x\to x_0}$*, אזי* $p_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ *. במילים אחרות, הפולינום הוא פולינום הטיילור מדרגה* n *של* f *סביב* x_0.

הוכחה. ראינו כבר שפולינום הטיילור $P_n(x)$ מקיים $f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)_{x\to x_0}$. לפי המשפט הקודם מתקיים בהכרח ש- $P(x) = P_n(x)$ וסיימנו □

דוגמה: ראינו בעבר שעבור $|x| \le 1$ מתקיים ש- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ובפרט אם נציב x^2 נקבל

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

לבן אפשר להראות ש- $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{n} p_k x^k + o((x-x_0)^n)_{x\to x_0}, p_k = \begin{cases} 0 & \text{odd is k if} \\ 1 & \text{even is k if} \end{cases}$
מהמשפט שהרגע הוכחנו נראה כי:

$$\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{odd is k if} \\ k! & \text{even is k if} \end{cases}$$

משום ש- $p_k = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{(k)}(0)}{k!}$. ככה לדוגמה אנחנו יכולים לחשב את הנגזרת ה- 2015 של הפונקציה ב-0 (יוצא 0) ואת הנגזרת ה- 2016 ב-0 (יוצא !2016) בקלות .