

משפט 1. תהי $f \in D^{n+1}(a, b)$ אזי

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

כאשר $c \in [x_0, x] \cup [x, x_0]$ (לא ידוע מי קטן יותר ממי), דרך אחרת לכתוב את זה היא $\exists 0 \leq t \leq 1 : c = x_0 + t(x - x_0)$ במילים אחרות.

$$R_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

כאשר c תלוי ב- x .

הוכחה. יהיו x_0, x אזי מההגדרה $R_n(x, x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ בעת נגדיר $\varphi(t) = R_n(x, t)$ ונראה ש-

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k$$

נגדיר גם בשביל הפשטות $\psi(t) = (x - t)^{n+1}$

נניח בה"כ ש- $x < x_0$, ועבור המצב ההפוך נעשה באופן אנלוגי:

ממשפט הערך הממוצע של קושי נקבל ש- $\exists c : \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}$ בעת נשים לב ש-

$$\varphi'(t) = \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k \right)' = 0 - \sum_{k=0}^n \left(\frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k \right)'$$

הנגזרת של $f(x)$ זה 0 משום שזהו מספר קבוע כי קבענו את x בהתחלה. בעת אם

נשתמש בכלל לייבניץ ונגזור בזהירות, נשים לב שזה פשוט $\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n$ עכשיו אם נחזור למסקנה של משפט קושי,

$$\exists c : \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n}{(n+1)(x - c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} =$$

$$\frac{R_n(x, x_0) - 0}{(x - x_0)^{n+1}} \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

□

דוגמה 1. חשב את $\log 1.5$ בקירוב של 2 ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פתרון: נסתכל על $f(x) = \log(1 + x)$. נראה כי

$$P_7(x, 0) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}$$

לפי לגרנד' השארית $f(0.5) - P_7(0.5, 0) = R_7(0.5, 0) = \frac{f^{(8)}(c)}{8!} (0.5 - 0)^8$ עבור $0 < c < 0.5$

$$|f^{(8)}(c)| = \left| -\frac{5040}{(1+c)^8} \right| \leq \frac{5040}{(1+0)^8} = 5040$$

(אי השיוויון נכון משום ש- $c \in (0, 0.5)$
מכאן ש-

$$|f(0.5) - P_7(0.5, 0)| \leq \frac{5040}{8!} 0.5^8 < 0.001$$

לכן הפולינום מסדר 7 נותן קירוב טוב מספיק, ואז אם נציב $x = 0.5$ נקבל מספר ש-3 הספרות הראשונות שלו אחרי הנקודה הן 0.405 ולכן אם ניקח את הקירוב ל-2 ספרות אחרי הנקודה נקבל 0.41.