נניח שאנו מחפשים את הגבול של $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$ . אם אחת הפונקציות שואפת ל-0 או אחת הפונקציות שואפת לאינסוף אנו יודעים די בקלות למה הגבול הזה שווה, ואם שתי הפונקציות שואפות למספר שהוא לא $0$ גם קל מאריתמטיקה פשוטה של גבולות למצוא את הגבול של המנה. אבל מה קורה במצב של $\frac{0}{0}$ או $\frac{\infty}{\infty}$ ? אנחנו בבעיה, ופה נכנס כלל לופיטל (L'hospital) שבכלל התגלה ע"י ברנולי.

**הגדרה 1.** עבור $p\in\mathbb{R}$ נגדיר את הסביבה $U_\delta(p)$ להיות $(p-\delta,p+\delta)$ . אם $p=\infty$ אז $U_\delta(p)=(\frac{1}{\delta},\infty)$ ועבור $p=-\infty$ נגדיר $U_\delta(p)=(-\infty,-\frac{1}{\delta})$

**משפט 1.** *נניח $f,g$ גזירות ב- $U_{\delta_0}(p)$ עבור $\delta_0>0$ . נניח גם ש- $\lim_{x\to p}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ קיים במובן הרחב (יכול להיות $\infty$ או $-\infty$ ).*
*אם אחד מהבאים מתקיים:*

1. $\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{x\to p}g(x)=0$
2. $\lim_{x\to p}g(x)=\infty$

*אזי גם קיים הגבול של המנה והוא שווה ל- $L$*

צריך לשים לב שהדרישה שהגבול של מנת הנגזרות קיים הוא הכרחי. לדוגמה, אם ניקח את $f(x)=x+\sin x$ ו- $g(x)=x$ אז בקלות נראה ש- $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ אבל $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ לא קיים!

*הוכחה.* תהי $(\alpha,\beta)$ סביבה של $L$ . אזי עבור תת סביבה $(\alpha',\beta')\subset(\alpha,\beta)$ מהגדרת הגבול ידוע שקיים $\delta<\delta_0$ כך ש- $\forall x\in U_\delta(p):\alpha'<\frac{f(x)}{g(x)}<\beta'$
בעת יהיו $x,x_1\in U_\delta(p)$ אבל מצד אחד בלבד! (אם $p=\pm\infty$ כמובן שזה לא בעיה).
לפי קושי $\exists c:\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}$ (פה נכנס העובדה שהם רק מצד אחד, משום שאחרת אולי $c=p$ ואנחנו רוצים להמנע ממצב כזה).
(בה"כ $g$ לא מתאפסת בסביבת $p$ משום שאם מתאפסת אינסוף פעמים אז אפשר לפי רול למצוא נקודה בה $g'(c)=0$ ואם היא מתאפסת מספר סופי של פעמים פשוט נצמצם את הסביבה ( $\delta$ ) מספיק כך שכבר לא יהיה כך.)
נוכיח את מצב 1:
בגבול בו $x_1\to p$ מקבלים ש-

$$\lim_{c\to p}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}$$

אבל

$$\alpha<\alpha'<\frac{f'(c)}{g'(c)}<\beta'<\beta\Rightarrow$$

$$\alpha<\alpha'\le\lim_{c\to p}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)}{g(x)}\le\beta'<\beta$$

ואז קיבלנו שלכל סביבה של $L$ יש סביבה מנוקבת של $p$ בה $\frac{f(x)}{g(x)}$ נמצא בסביבה של $L$ , ומהגדרת הגבול נקבל ש- $\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=L$
נוכיח את מצב 2:

ראינו ש-

$$\alpha'(g(x)-g(x_1)) < f(x)-f(x_1) < \beta'(g(x)-g(x_1))$$

$$\alpha'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta'\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)}{g(x)}$$

ונשים לב שהצדדים שואפים ל- $\alpha',\beta'$ ומכאן שעבור סביבה מספיק קטנה של $p$ נקבל עדיין ש-

$$\alpha < \frac{f(x)}{g(x)} < \beta$$

ומאותה סיבה קודם נקבל את הדרוש

$\square$