1 סוגים מיוחדים של אופרטורים

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש-T:

1. **נורמלי**, אם $TT^*=T^*T$ (כלומר, T ו-T^* מתחלפים).
2. **אוניטרי**, אם $TT^*=I$ (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ - אומרים ש-T **אורתוגונלי**).
3. **צמוד לעצמו**, אם $T^*=T$ (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ - אומרים ש-T **סימטרי**).

הערה 1. כל אופרטור אוניטרי הוא נורמלי, וגם כל אופרטור צמוד לעצמו הוא נורמלי.

השם "אוניטרי" (ו"אורתוגונלי" מוכר לנו (גם "סימטרי") מתורת המטריצות, ולא סתם; אכן יש קשר בין המושגים. המשפט הבא יבטא את הקשר הזה.

משפט 1. *אם $T:V\to V$ אופרטור מאחד הסוגים הנ"ל (נורמלי, אוניטרי או צמוד לעצמו), ואם B בסיס אורתונורמלי של V, אזי המטריצה המייצגת $A=[T]_B$ מקיימת את התכונה המתאימה, ז"א:*

1. *$AA^*=A^*A$ (A נקראת **נורמלית**).*
2. *$AA^*=I$ (A נקראת **אוניטרית**).*
3. *$A=A^*$ (A נקראת **צמודה לעצמה**).*

בכיוון ההפוך, אם A מטריצה המקיימת את אחת מהתכונות הנ"ל, אזי האופרטור הלינארי $T=L_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^n$ המוגדר על ידי הנוסחה $L_A(v)=Av$ מקיים את התכונה המתאימה.

הוכחה. המטריצה המייצגת של T^* יחסית לבסיס אורתונורמלי B היא $A^*=\overline{A}^t$, ומזה נובע הכל.

□

2 הזהויות הפולריות

ננסה בעת לקחת נורמה על מרחב כלשהו V (מעל הממשיים או מעל המרוכבים, כמובן), ולשחזר ממנו את המכפלה הפנימית.

יהיו $u,v\in V$. נתבונן בנורמה $\|u+v\|$:

$$\|u+v\|^2=\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle+\langle v,v\rangle=$$

$$=\|u\|^2+\overline{\langle u,v\rangle}+\langle u,v\rangle+\|v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\langle u,v\rangle\right)$$

זהות פולרית ממשית

אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, אזי לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)$.

בעת נוכל להניח $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, ונמשיך. נוכיח למה קצרה, שתעזור להקל את החישובים.

למה 2.

$$\mathrm{Im}\left(\langle u,v\rangle\right)=\mathrm{Re}\left(\langle u,iv\rangle\right)$$

הוכחה. על פי חצי-לינאריות, $\langle u, iv\rangle = \bar{i}\langle u, v\rangle = -i\langle u, v\rangle$.
אם $\langle u, v\rangle = x + iy$, אזי $\text{Im}\left(\langle u, v\rangle\right) = y$. מתקיים $\langle u, iv\rangle = -i\left(x+iy\right) = y - ix$,
ולכן גם $\text{Re}\left(\langle u, iv\rangle\right) = y$.

$\square$

נשים לב כי $\|iv\|^2 = \langle iv, iv\rangle = i\bar{i}\langle v, v\rangle = \|v\|^2$, ולכן, על פי הזהויות שהוכחנו קודם,

$$\text{Im}\left(\langle u, v\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$

זהות פולרית מרוכבת
אם $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, אזי לכל $u, v \in V$ מתקיים

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right)$$

מכפלה פנימית ניתנת לשחזור החל מנורמה.

3 חזרה לאופרטורים המיוחדים

ננסה בעת למצוא קריטריונים לנורמליות ולאוניטריות של אופרטור.

משפט 3. *קריטריון לנורמליות*
אופרטור $T : V \to V$ הוא נורמלי אם ורק אם לכל $v \in V$ מתקיים $\|T\left(v\right)\| = \|T^*\left(v\right)\|$.

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח ש-T נורמלי, אזי $TT^* = T^*T$.

$$\|T\left(v\right)\|^2 = \langle T\left(v\right), T\left(v\right)\rangle = \langle v, T^*T\left(v\right)\rangle$$

$$\|T^*\left(v\right)\|^2 = \langle T^*\left(v\right), T^*\left(v\right)\rangle = \left\langle v, \left(T^*\right)^* T^*\left(v\right)\right\rangle = \langle v, TT^*\left(v\right)\rangle$$

נקבל שוויון $\|T\left(v\right)\|^2 = \|T^*\left(v\right)\|^2$, ולכן $\|T\left(v\right)\| = \|T^*\left(v\right)\|$.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שלכל $v \in V$, $\|T\left(v\right)\| = \|T^*\left(v\right)\|$.

נוכיח קודם שלכל $u, v \in V$, מתקיים $\langle T\left(u\right), T\left(v\right)\rangle = \langle T^*\left(u\right), T^*\left(v\right)\rangle$. ניעזר בזהות הפולרית:

$$\langle T\left(u\right), T\left(v\right)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T\left(u\right)+T\left(v\right)\|^2 - \|T\left(u\right)\|^2 - \|T\left(v\right)\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|T\left(u\right)+iT\left(v\right)\|^2 - \|T\left(u\right)\|^2 - \|T\left(v\right)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T\left(u+v\right)\|^2 - \|T\left(u\right)\|^2 - \|T\left(v\right)\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|T\left(u+iv\right)\|^2 - \|T\left(u\right)\|^2 - \|T\left(v\right)\|^2\right)$$

לפי אותם החישובים ל-T^*,

$$\langle T^*\left(u\right), T^*\left(v\right)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T^*\left(u+v\right)\|^2 - \|T^*\left(u\right)\|^2 - \|T^*\left(v\right)\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|T^*\left(u+iv\right)\|^2 - \|T^*\left(u\right)\|^2 - \|T^*\left(v\right)\|^2\right)$$

נקבל שלכל $u, v \in V$, מתקיים $\langle T^* (u), T^* (v) \rangle = \langle T (u), T (v) \rangle$. מצד שני, על פי הגדרת ההעתקה הצמודה, מתקיים

$$\langle T (u), T (v) \rangle = \langle u, T^* T (v) \rangle$$

$$\langle T^* (u), T^* (v) \rangle = \langle u, TT^* (v) \rangle$$

לכן $\langle u, T^* T (v) \rangle = \langle u, TT^* (v) \rangle$ לכל $u, v \in V$.

כלומר, לכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle u, T^* T (v) - TT^* (v) \rangle = 0$.

נבחר $u = T^* T (v) - TT^* (v)$. לפי האי-שליליות, נקבל $T^* T (v) - TT^* (v) = 0$ לכל $v \in V$, כלומר $T^* T - TT^* = 0$ אופרטור האפס, לכן $T^* T = TT^*$, כלומר T נורמלי.

□

משפט 4. *קריטריונים לאוניטריות*

התכונות הבאות של אופרטור T שקולות:

1. *T אוניטרי.*
2. *T שומר מכפלה פנימית, כלומר לכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle T (u), T (v) \rangle = \langle u, v \rangle$.*
3. *T שומר נורמה, כלומר לכל $v \in V$ מתקיים $\|T (v)\| = \|v\|$.*
4. *T שומר מרחקים, כלומר לכל $u, v \in V$ מתקיים $\rho (T (u), T (v)) = \rho (u, v)$.*

הוכחה. $\boxed{1 \Leftarrow 2}$ נניח $T^* T = TT^* = I$, ונחשב לכל $u, v \in V$:

$$\langle T (u), T (v) \rangle = \langle u, T^* T (v) \rangle = \langle u, I (v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

$\boxed{2 \Leftarrow 1}$ נניח שלכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle u, T^* T (v) \rangle = \langle T (u), T (v) \rangle = \langle u, v \rangle$, כלומר $\langle u, T^* T (v) - v \rangle = 0$. נבחר $u = T^* T (v) - v$, ונקבל שלכל $v \in V$, מתקיים $T^* T (v) - v = 0$, ז"א $T^* T = I$, ולכן T אוניטרי.

$\boxed{3 \Leftarrow 4}$ נניח $\|T (v)\| = \|v\|$ לכל $v \in V$. אזי לכל $u, v \in V$:

$$\rho (T (u), T (v)) = \|T (u) - T (v)\| = \|T (u - v)\| = \|u - v\| = \rho (u, v)$$

$\boxed{4 \Leftarrow 3}$ נניח שלכל $u, v \in V$ מתקיים $\rho (T (u), T (v)) = \rho (u, v)$. אזי לכל $v \in V$:

$$\|T (v)\| = \rho (T (v), 0) = \rho (v, 0) = \|v\|$$

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$ נניח $\langle T (u), T (v) \rangle = \langle u, v \rangle$ לכל $u, v \in V$, וניקח $u = v$. נקבל שלכל $v \in V$,

$$\|T (v)\| = \|v\| \Leftarrow \|T (v)\|^2 = \langle T (v), T (v) \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$ נניח $\|T(v)\| = \|v\|$ לכל $v \in V$. נתבונן ב-$\langle T(u), T(v)\rangle$:

$$\langle T(u), T(v)\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T(u)+T(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|T(u)+iT(v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|T(u+v)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|T(u+iv)\|^2 - \|T(u)\|^2 - \|T(v)\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) + \frac{i}{2}\left(\|u+iv\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \langle u, v\rangle$$

□

הערה 2. תזכורת - זווית בין וקטורים
נזכיר כי עבור $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, אם $0 \neq u, v \in V$, אזי הזווית φ בין הווקטורים u, v היא המספר היחיד באינטרוול $[0, \pi]$ המקיים $\cos\varphi = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

נראה בעת מה הקשר בין אופרטורים נורמליים ואוניטריים לזוויות.

משפט 5. *אם T נורמלי, ואם $u, v \in V$ שונים מאפס, אזי הזווית בין $T(u), T(v)$ שווה לזווית בין $T^*(u), T^*(v)$.*

הוכחה. נשים לב כי אם T נורמלי, אזי $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, T^*T(v)\rangle = \langle u, TT^*(v)\rangle = \langle T^*(u), T^*(v)\rangle$, ולכן גם $\|T(u)\| = \|T^*(u)\|$ ו-$\|T(v)\| = \|T^*(v)\|$. אם כן,

$$\cos\sphericalangle(T(u), T(v)) = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|T(u)\|\,\|T(v)\|}$$

$$\cos\sphericalangle(T^*(u), T^*(v)) = \frac{\langle T^*(u), T^*(v)\rangle}{\|T^*(u)\|\,\|T^*(v)\|}$$

ולכן הזוויות שוות.

□

הערה 3. כל אופרטור אוניטרי T שומר זוויות, כלומר $\sphericalangle(T(u), T(v)) = \sphericalangle(u, v)$.

הוכחה.

$$\cos\sphericalangle(T(u), T(v)) = \frac{\langle T(u), T(v)\rangle}{\|T(u)\|\,\|T(v)\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \cos\sphericalangle(u, v)$$

□

נשאלת השאלה - לאחר המשפט הקודם, שבו הראינו שקילויות רבות לאופרטור אוניטרי, האם גם כאן אין שקילות? התשובה היא שאין. ניתן דוגמה.

דוגמה 1. ניקח $T(v) = 2v$. הוא שומר זוויות, אבל איננו אוניטרי; $TT^*(v) = 4v$.