

**משפט 1.** אם  $f \in D(a, b)$  אז לנגזרת אין נק' רציפות מסוג ראשון. במילים אחרות, עבור  $x_0 \in (a, b)$  אם קיימים  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$  אזי הם שווים לנגזרת בנקודה (ובפרט שווים ביניהם)

הוכחה.  $f$  גזירה ב-  $x_0$  ולכן הנגזרות החד צדדיות קיימות ושוות לנגזרת בנקודה. לפי משפט לגרנדז',  $\exists c : f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ . אם נניח ש-  $x < x_0$  נקבל ש-

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{c \rightarrow x_0^-} f'(c)$$

ובאופן דומה

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{c \rightarrow x_0^+} f'(c)$$

אבל הנגזרות החד צדדיות שוות ומכאן ש-

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$$

□

דוגמה:  
 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$  פונקציה גזירה עם נגזרת לא רציפה. ברור שהנגזרת קיימת ורציפה בכל מקום שהוא לא  $x = 0$  (כפל והרכבה של פונקציות גזירות ברציפות). אם  $x = 0$  אז קודם נבדוק רציפות ואז גזירות. רציפות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

משום שזה מקרה של פונקציה חסומה כפול פונקציה ששואפת ל-0. כעת נבדוק גזירות:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

מאותה סיבה בדיוק. אבל עבור  $x \neq 0$  מתקיים ש-  $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$  והגבול  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  לא קיים ומכאן שהנגזרת לא רציפה.