**משפט 1.** *תהי* $f \in C[a,b] \cap D(a,b)$ *אזי קיימת* $c \in (a,b)$ *כך ש-* $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

באופן פיזיקלי, כבר אמרנו שהנגזרת של פונקציית המיקום לפי הזמן היא המהירות, ולכן המשפט אומר שבכל דרך "חלקה" שעושים (בלי שינויים פתאומיים במהירות) תמיד יש רגע בו המהירות שווה למהירות הממוצעת במהלך כל הנסיעה. באופן גיאומטרי, המשפט אומר שאם מעבירים קו על גרף הפונקציה בין נק' ההתחלה והסוף אז קיימת נקודה באמצע שהמשיק לפונקציה בנקודה מקביל לקו הזה.

*הוכחה.* נגדיר $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ונראה כי $F(a) = F(b) = f(a)$ ולכן מתקיים משפט רול וקיימת $c$ כך ש-

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ □

**מסקנה 2.** *אם* $f'(x) = 0$ *לכל* $x \in (a,b)$ *אזי* $f(x) = const$ *(קבועה)*

*הוכחה.* נניח בשלילה ש-$f$ לא קבועה ואז $\exists x_1, x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$ (בה"כ $x_1 < x_2$ ) , ולפי משפט ערך הממוצע של לגרנז' קיים $x_1 < c < x_2$ כך ש- $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \neq 0$ משום שהמונה שונה מ-$0$, אבל זה בסתירה לכך שהנגזרת זהותית $0$! □

**מסקנה 3.** *אם* $\forall x \in (a,b) : f'(x) = g'(x)$ *אזי* $\exists c \forall x : g(x) = f(x) + c$

*הוכחה.* נגדיר $F(x) = g(x) - f(x)$ . מתקיים ש- $F'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ ולכן $F(x) = g(x) - f(x) = c$ □

**מסקנה 4** (אומדן של שינוי פונקציה)**.** *תהי* $f \in D(a,b) \cap C[a,b]$ *כך ש-* $|f'(x)| \leq M$ *לכל* $x \in (a,b)$ *, אזי* $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$

*הוכחה.* לפי לגרנז'

$$\exists c : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow |f(b) - f(a)| = |f'(c)|(b-a) \leq M(b-a)$$

□