

משפט 1. נניח $f : (a, b) \rightarrow (c, d), g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ את $h = g \circ f$ כלומר $h(x) = g(f(x))$. אם f דיפרנציאבילית ב- x_0 ו- g דיפרנציאבילית ב- $f(x_0)$ אזי h דיפרנציאבילית ב- x_0 ומתקיים: (הצורות שקולות)

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

$$\frac{dh}{dx}(x_0) = \frac{dg}{df}(f(x_0)) \cdot \frac{df}{dx}(x_0)$$

אם הכתיב האחרון נראה לכם מוזר ועושה לכם כאב ראש, אל תדאגו, זה בעיקר בשביל הפיזיקאים, אבל בכל מקרה הנה דוגמה:

אם נגדיר $g(u) = \sin u$ אבל $u(x) = x^2$ אז הנגזרת של $h(x) = g(u(x)) = \sin x^2$ היא $\frac{dh}{dx}(x) = \frac{dg}{du}(u(x)) \cdot \frac{du}{dx}(x)$ אבל $\frac{dg}{du} = \cos u$ ו- $\frac{du}{dx} = 2x$ ולכן סך הכל נקבל

$$\cos(u(x)) \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x$$

הוכחה. ידוע ש-

$$f(x_0 + t) = f(x_0) + f'(x_0)t + \epsilon_1(t) \cdot t$$

כש- $\epsilon_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ ובנוסף,

$$g(y_0 + s) = g(y_0) + g'(y_0)s + \epsilon_2(s) \cdot s$$

כש- $\epsilon_2(s) \xrightarrow[s \rightarrow 0]{} 0$. לכן:

$$h(x_0 + t) = g(f(x_0 + t)) = g(f(x_0) + f'(x_0)t + \epsilon_1(t) \cdot t) =$$

$$g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f'(x_0)t + \epsilon_1(t) \cdot t) + \epsilon_2(f'(x_0)t + \epsilon_1(t)) \cdot (f'(x_0)t + \epsilon_1(t)) =$$

$$g(f(x_0)) + g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \cdot t + o(t)_{t \rightarrow 0} \Rightarrow (g(f(x)))'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

□

מסקנה 2. הנגזרת של x^α היא $\alpha x^{\alpha-1}$, גם אם $\alpha \notin \mathbb{N}$

הוכחה.

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = (e^{\alpha \ln x}) \cdot (\alpha \ln x)' = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

□

1. דוגמה

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$$

←

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$