נניח איש אחד נסע ממקום א' למקום ב' ונגדיר פונקציה $f(t)$ שעבור זמן t נותנת את המיקום של האיש. המהירות הממוצעת שלו בין $t=a$ ל- $t=b$ מוגדרת להיות כמה התקדמם בזמן הזה חלקי כמה זמן עבר, כלומר $v=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. אבל זה נותן לנו את המהירות הממוצעת בקטע יחסית ארוך, מה קורה אם נרצה לדעת את המהירות בזמן ספציפי t_0 ?

נצטרך למצוא את המהירות הממוצעת בקטעים הולכים ומתהדקים סביב t_0 (בהתחלה נבדוק את המהירות הממוצעת בין דקה לפני לדקה אחרי ואז את המהירות הממוצעת בין שנייה לפני לשנייה אחרי ואז את המהירות הממוצעת בין חצי שנייה לפני לחצי שנייה אחרי...) והגבול שלהם מוגדר להיות המהירות בזמן t_0 . מאיך שניסחנו את זה אפשר להבין ש-

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0-\Delta t)}{(t_0+\Delta t)-(t_0-\Delta t)}$$

אם כי ההגדרה הזאת לפעמים עלולה להביא לבעיות מסוימות. הגדרה טובה יותר תהיה לבדוק את המהירות הממוצעת בקטעים שמתחילים ב- t_0 ומסתיימים ב- $t_0+\Delta t$ ולהשאיף את Δt ל-0 ולקבל את ההגדרה:

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{(t_0+\Delta t)-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

כל אלה נתנו הגדרות שקולות למושג מהירות נקודתית שזה כמו קצב השינוי במיקום ליחידת זמן מאוד קטנה. באופן כללי, רוב הפעמים אנחנו נתקל בפונקציות שההשתנות שלהן אינן קבועה, ולכן נוח להגדיר את המושג שמתאר את השינוי ליחידת "זמן", הנגזרת.

הגדרה 1. נניח f מוגדרת בסביבת x_0 וקיים הגבול $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ אז הגבול הזה מוגדר להיות הנגזרת של f בנקודה x_0 ומסמנים $f'(x_0)$ או $\frac{df}{dx}(x_0)$.

דוגמה 1. נגזרת של ישר $f(x)=mx+n$ בנקודה a תהיה

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{mx+n-ma-n}{x-a}=m$$

ללא תלות בנקודה a!

דוגמה 2.

$$f(x)=\sin x\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=$$

$$\{\Delta x'=\frac{\Delta x}{2}\}=\lim_{\Delta x'\to 0}\frac{2\sin\Delta x'\cos(x+\Delta x')}{2\Delta x'}=\lim_{\Delta x'\to 0}1\cdot\cos(x+\Delta x')=\cos(x)$$

דוגמה 3.

$$f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x}=e^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x\cdot 1=e^x$$

דיון: נשים לב שמתקיים הדבר הבא:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-k=0\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)}{x-x_0}=0$$

נקבל אז ש- $f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)=o(x-x_0)_{x\to x_0}$ ומכאן

$$f(x)=f(x_0)+k(x-x_0)+o(x-x_0)_{x\to x_0}$$

. אם נחליף את המשתנים: $t=x-x_0$ נקבל ש- $f(x_0+t)=f(x_0)+kt+o(t)_{t\to 0}$.

הגדרה 2. הדיפרנציאל של f בנקודה x_0 היא פונקציה לינארית df_{x_0} שמקיימת

$$f(x_0+t)=f(x_0)+df_{x_0}(t)+o(t)_{t\to 0}$$

לא תמיד קיים דיפרנציאל, וכשהוא קיים אומרים ש- f דיפרנציאבילית. במילים אחרות f דיפרנציאבילית אם קיים k כך ש-

$$f(x_0+t)=f(x_0)+kt+o(t)_{t\to 0}$$

המשך דיון: אם קיים דיפרנציאל אז ראינו מתחילת הדיון שה-k היחיד שמתאים לפי ההגדרה זה $f'(x_0)$ ומכאן ש- $df_{x_0}(t)=f'(x_0)t$.
דרך נוספת להסתכל על זה היא לרשום $\underbrace{f(x_0+t)-f(x_0)}_{\text{f in change}}=kt+o(t)_{t\to 0}$. נגיד ש- f דיפרנציאבילית ב- x_0 אם קיימת פונקציה לינארית df_{x_0} כך ש- $f(x_0+t)-f(x_0)=df_{x_0}(t)+o(t)_{t\to 0}$. כלומר השינוי ב- f, מאוד קרוב ל- x_0 נראה בקירוב כמו פונקציה לינארית. כל זה נראה מאוד מוזר ומיותר, ואכן אין לזה הרבה מאוד משמעות בפונקציות שנתקל בהן בקורס הזה, אך ההגדרות האלה חשובות ונדבר עליהם בהרחבה שנה הבאה בפונקציות בכמה משתנים.

הגדרה 3. תהי f פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה x_0 אז הפונקציה

$$p(x)=f(x_0)+df_{x_0}(x-x_0)$$

נקראת הישר המשיק לפונקציה f בנקודה x_0 (בעצם אמרנו קודם שהשינוי ב- f מתנהג קרוב ל- x_0 כמו פונקציה לינארית והמשיק זה אותו ישר מתאים שעובר דרך $f(x_0)$)