הגדרה 1. נגדיר את $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ ונראה כי מוגדר היטב לכל $x\in\mathbb{R}$ משום שלפי מבחן השורש של קושי $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\frac{x^n}{n!}|}=|x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0<1$ ומכאן שמתכנס.

משפט 1. *1.* $\exp(x)\cdot\exp(y)=\exp(x+y)$

2. $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$

הוכחה. 1. הטור מתכנס בהחלט ולכן אפשר להשתמש בכפל טורים:

$$\exp(x)\cdot\exp(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}=\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{n+m=N}\frac{x^n}{n!}\frac{y^m}{m!}=$$

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\sum_{n+m=N}\frac{N!x^ny^m}{n!m!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}(x+y)^N=\exp(x+y)$$

.2

$$1=\exp(0)=\exp(x-x)=\exp(x)\cdot\exp(-x)\Rightarrow\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$$

$\square$

מכל האמור לעיל נסיק ש- $\exp(x)=a^x$ כאשר $a=\exp(1)$ אבל הוכחנו בעבר ש- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=e$ ומכאן ש- $\exp(x)=e^x$. נסיק מכך ש- $e^x>1$ עבור $x>0$ ו- $e^x<1$ עבור $x<0$

משפט 2. $\exp(x)$ *מונוטונית עולה ממש*

הוכחה.

$$x<y\Rightarrow y-x>0\Rightarrow\exp(y-x)=\frac{\exp(y)}{\exp(x)}>1\Rightarrow\exp(y)>\exp(x)$$

$\square$

משפט 3. $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

הוכחה. נשים לב ש- $e^x=1+x+o(x), x\to0$ ולכן לפי הגדרה

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1+x+o(x)_{x\to0}-1}{x}=1+\lim_{x\to0}\frac{o(x)_{x\to0}}{x}=1+0=1$$

$\square$

ממה שהוכחנו קודם ניתן להגדיר פונקציה הופכית ל- e^x:

הגדרה 2. $\ln:(0,\infty)\to(-\infty,\infty)$ מוגדר להיות הפונקציה ההופכית של $e^x:(-\infty,\infty)\to(0,\infty)$. מכאן ניתן להוכיח כל מיני תכונות של הלוגריתם:

$\ln xy=\ln x+\ln y$

$\ln$ מונוטונית עולה ממש

$\ln 1=0$

$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=\infty, \lim_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$

משפט 4. $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

הוכחה.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\{x=\ln(1+t)\}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$$

$\square$

מסקנה 5. $\ln(1+t)=t+o(t), t\to 0$

משפט 6. $e^x, \ln(x)$ *רציפות*

הוכחה. מספיק להוכיח ל- e^x ואז מהמשפט שהוכחנו היום גם $\ln(x)$ בתור פונקציה הופכית לפונקציה רציפה תהיה גם רציפה.

$$\lim_{x\to x_0}e^{x-x_0}=\{y=x-x_0\}=\lim_{y\to 0}e^y=1\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{e^x}{e^{x_0}}=1\Rightarrow\lim_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}$$

ומכאן ש- e^x רציפה. $\square$

הגדרה 3. נגדיר את $a^x=e^{x\ln a}$ ונראה כי זה רציף בתור הרכבה של רציפות.

משפט 7. $\sin(x), \cos(x)$ *רציפות*.

הוכחה.

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\frac{|x-x_0|}{2}=|x-x_0|$$

ולכן $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. עבור קוסינוס באופן דומה $\square$