1 הקדמה

1.1 קבוצות מספרים

הפעם הראשונה שאנו לומדים לספור היא בעזרת האצבעות- אצבע אחת, שתי אצבעות וכן הלאה. במתמטיקה אנו קוראים למספרים האלה טבעיים ומסמנים:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

את המספרים הטבעיים אנחנו יכולים לחבר אחד עם השני, אבל אם ננסה לפתור את המשוואה $x + 2 = 1$ נגלה שאין פתרון בקבוצת הטבעיים. כדי לטפל בבעיה זו, נגדיר את קבוצת השלמים

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...,\}$$

אך גם בקבוצה זו מתעוררת בעיה, משום שלמשוואה $2x = 1$. נגדיר את המספרים הרציונאליים (מהמילה האנגלית ,ratio יחס), להיות כל השברים מהצורה

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

המספרים הרציונאליים הם כל המספרים שמתקבלים כיחס בין 2 מספרים שלמים. נשים לב שבכל מספר שלם a הוא רציונאלי משום שניתן להצגה כ- $\frac{a}{1}$, יחס של 2 מספרים שלמים.

האם בזאת כיסינו את כל המספרים שאנחנו מכירים? לא, לדוגמה π, e הם מספרים לא רציונאליים (ברגע לא צריך לדעת את המשמעות של כל אחד מהם). גם המספר $\sqrt{2}$ לא רציונאלי. ההוכחה של זה מסתמכת על הרעיון של "הוכחה על דרך השלילה", אנחנו נניח שמה שאנחנו רוצים להוכיח לא נכון ונגיע לסתירה:

נניח ש- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, אזי לפי הגדרה קיימים מספרים שלמים p, q ש- $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, בפרט אפשר להניח שזהו שבר "מצומצם", כלומר אם לדוגמה היה לנו $\frac{16}{34}$ נדאג לצמצם ל- $\frac{8}{17}$. לכל שבר יש צורה שאי אפשר לצמצם יותר, אנחנו נראה שאם $\sqrt{2}$ ניתן להציג כשבר, אין לו צורה כזאת, ומכאן תבוא הסתירה.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

נעלה את שני האגפים בריבוע, ונקבל:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

ולכן

$$2q^2 = p^2$$

כלומר p^2 הינו מספר זוגי (הוא מתחלק ב-2) ומכאן שגם p זוגי. נסמן אם כך $p = 2a$. ולכן:

$$2q^2 = 4a^2$$

נחלק ב2 את שני האגפים ונקבל

$$q^2 = 2a^2$$

כלומר גם q הינו מספר זוגי. אבל זה לא ייתכן, כיוון שהצגנו את שורש 2 כשבר מצומצם. לכן הגענו לסתירה המצביעה על העובדה שההנחה שלנו היא לא נכונה. ההנחה שלנו כמובן היא ששורש 2 הוא מספר רציונאלי.

לכן נרצה להגדיר את המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$, הגדרה מדויקת יותר של הקבוצה נראה בהמשך. כרגע רק צריך לשים לב לעובדה שכל מספר ממשי ניתן לקרב אותו באיזו רמת דיוק שאנחנו רוצים ע"י מספר רציונאלי, לדוגמה אם נבחר לקרב את שורש 2 על ידי 10 הספרות הראשונות שלו, נקבל מספר רציונאלי:
$1.4142135623 = \frac{14142135623}{10000000000}$

הערה 1. בקורס זה נדבר הרבה על מה שקורה בתתי קבוצות של $\mathbb{R}$, בעיקר קטעים.
הקטע הסגור $[a,b]$ הוא קבוצת המספרים $\{x : a \le x \le b\}$
הקטע הפתוח (a,b) הוא קבוצת המספרים $\{x : a < x < b\}$
הקטע $[a,b)$ הוא קבוצת המספרים $\{x : a \le x < b\}$
הקטע $(a,b]$ הוא קבוצת המספרים $\{x : a < x \le b\}$

2.1 חזקות

3.1 חזקות ושורשים

הגדרה 1 (חזקה עם מעריך טבעי). עבור מספר ממשי x ומספר טבעי n נגדיר x^n להיות מכפלה של x בעצמו n פעמים. במקרה זה אומרים ש-x הוא בסיס החזקה ו-n הוא המעריך.

דוגמה 1.
$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81\ ,\ 6^2 = 6 \cdot 6 = 36\ ,\ 12^1 = 12$$

נשים לב ש-

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m\text{times}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{times}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m+n\text{times}} = a^{m+n}$$

לדוגמה $11^3 \cdot 11^4 = 11^{3+4} = 11^7$. בנוסף אם בסיס החזקה שונה מ-0, ניתן להפיק את הכלל הבא:
$$a^m = a^{m-n+n} = a^{m-n} \cdot a^n \Rightarrow a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

הגדרה 2. מהכלל הזה ניתן להגדיר חזקה עם מעריך שלם:

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = 1$$

(עבור $a = 0$ לא מוגדרת החזקה 0 בחזקת 0)

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

דוגמה 2.
$$3^0 = 1\ ,\ 4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

מה אם המעריך לא שלם? קודם כל, צריך לשים לב לעוד כלל חזקות חשוב:

$$(a^m)^n = \underbrace{(a^m) \cdot (a^m) \cdot (a^m) \cdots (a^m)}_{n\text{times}} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{times}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{times}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{times}}}_{n\text{times}} =$$

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \cdot n \text{times}} = a^{m \cdot n}$$

הגדרה 3 (שורש). $\sqrt[n]{x}$ מוגדר להיות המספר שאם נעלה בחזקת n, נקבל את x .

דוגמה 3. $\sqrt[2]{9} = 3$ כי $3^2 = 9$
$\sqrt[5]{243}$ הוא המספר שאם נעלה בחזקת 5 נקבל 243, והתשובה היא 3, משום ש- $3^5 = 243$
במקרה ש- $n = 2$, במקום $\sqrt[2]{x}$ מקובל לסמן $\sqrt{x}$

הערה 2. אם n אי זוגי אין שום בעיה, אבל אם n זוגי נשים לב שלכל מספר ממשי x^n הוא אי שלילי ולכן עבור $y < 0$ אם נחפש את $\sqrt[n]{y}$ $x =$, אז $x^n = y$ אבל x^n אי שלילי ו- y שלילי ולכן יש סתירה. אי אפשר להגדיר שורש ממשי עם n זוגי למספר שלילי. כמו כן, נראה כי עבור n זוגי מתקיים $x^n = (-x)^n$, אז מהו השורש ה- nי של x^n ? מגדירים שהשורש ה-nי במקרה הזה יהיה החיובי מביניהם.
בעת, נשים לב לכך ש-
$a = a^1 = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = (a^{\frac{1}{n}})^n$
ומכאן ש- $a^{\frac{1}{n}}$ הוא מספר אם נעלה אותו בחזקת n נקבל את a, כלומר לפי הגדרה, השורש ה-n י של a. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. הגענו ששורש הוא סוג של חזקה, ולכן ניתן בקלות להגיע לחוקי שורשים שאנלוגיים לחוקי החזקות. בנוסף אפשר להגדיר עכשיו חזקה עם מעריך רציונאלי:

הגדרה 4 (חזקה עם מעריך רציונאלי).

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

4.1 לוגריתמיים

ראינו ששורש היא פעולה הפוכה לחזקה ששימושית במקרה שאנחנו רוצים לשחזר את בסיס החזקה (לדוגמה "מה בחזקת 4 שווה 81? $\sqrt[4]{81}$), אבל זה לא עוזר לנו כשאנחנו רוצים לשחזר את המעריך (כמה פעמים אני צריך לכפול את 2 בעצמו כדי לקבל 1024? או במילים אחרות, איזה n פותר את המשוואה $2^n = 1024$?). בשביל שנוכל לענות על שאלות כאלה, נגדיר את פעולת הלוגריתם:
$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. כלומר $\log_a b$ הוא המעריך שצריך להעלות את a בחזקתו כדי לקבל את b:
$a^{\log_a b} = b$
בנוסף, a נקרא "בסיס הלוגריתם".
כמה דוגמאות:
$\log_2 1024 = 10$ כי $2^{10} = 1024$
$\log_4 8 = \frac{3}{2}$ כי $4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} = 8$
כאשר בסיס הלוגריתם הוא המספר e, נסמן הרבה פעמים log בלי לציין את הבסיס (משום ש-e הוא "הבסיס הטבעי") או שנכתוב במקום זאת ln (ואומרים "לאן"). יש לשים לב שבמחשבונים רבים כאשר לא מצויין בסיס הלוג מתכוונים לבסיס 10.

5.1 חוקי לוגריתמים

עבור $\log_a b$, בסיס הלוגריתם צריך להיות חיובי ששונה מ-1 ו-b חיובי. אם ננסה להגדיר לוגריתם עם בסיס שלילי, נגיע לבעיות שאין להם תשובה במספרים הממשיים, ואם הבסיס

היה $a=1$ נקבל לכל $b\neq 1$ שלא קיים x כך ש- $a^x=b$ ואם $b=1$ כל x יתאים. אחרי שהגדרנו שהבסיס חיובי, $a^{\log_a b}=b$ חיובי משום שחזקה עם בסיס חיובי חייבת להיות חיובית.

$a^0=1\Rightarrow \log_a 1=0$

$a^1=a\Rightarrow \log_a a=1$

$a^{\log_a x+\log_a y}=a^{\log_a x}\cdot a^{\log_a y}=x\cdot y\Rightarrow \log_a xy=\log_a x+\log_a y$

את שאר התכונות נסו להוכיח בעצמכם:

$\log_a(x^y)=y\cdot\log_a x$

$\log_a(\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y$

$\log_a b=\frac{\log_m b}{\log_m a}$ - תכונה זו מאוד חשובה ובעצם אומרת איך אפשר להחליף את הבסיס של הלוגריתם לכל בסיס שאנחנו רוצים .(m) מתכונה זו, אם נרצה לחשב במחשבון (שיודע לחשב לוגריתם רק לפי בסיס 10) את $\log_2 6$, נוכל לחשב במקום את $\frac{\log_{10} 6}{\log_{10} 2}$

6.1 הערך המוחלט ואי שיוויונים

הגדרה 5. באופן אינטואיטיבי, הערך המוחלט של מספר ממשי הוא המרחק שלו מ-0.
לדוגמא: $|7|=|-7|=7$
ההגדרה המדוייקת של הערך המוחלט היא:

$$|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}=\sqrt{x^2}$$

הערה 3 (תכונות בסיסיות של ערך מוחלט).

1. $\forall x:|x|=|-x|$
2. $\forall x:|x|\geq 0$
3. $x=0\Leftrightarrow |x|=0$
4. $\forall x,y:|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$
5. $\forall x:x\leq|x|$

הערה 4. המרחק בין x ל-y הוא $|x-y|$. נשים לב שזה במובן כמו המרחק בין y ל-x, שלפי ההגדרה הזו הוא $|y-x|$.

משפט 1 (אי שיוויון המשולש).

$$\forall x,y:|x+y|\leq|x|+|y|,||x|-|y||\leq|x-y|$$

הערה 5 (תכונות בסיסיות של אי שיוויונים).

1. $x\leq y\Leftrightarrow -x\geq -y$
2. נניח $0\leq x,y$ אזי $x\leq y$ אם ורק אם $x^2\leq y^2$

3. נניח $0 < x, y$ אזי $x \le y$ אם ורק אם $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$

הערה 6 (ערך מוחלט ואי שיוויונים). נניח $L \geq 0$ אזי

1. $|x| \le L \Leftrightarrow -L < x < L$
2. $|x| \ge L \Leftrightarrow x \ge L$ or $x \le -L$

2 אינפי 1

1.2 חסמים

הגדרה 6. תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אזי:

1. M נקרא חסם מלעיל של A אם $\forall a \in A : a \le M$ (כלומר שגדול/שווה מכל איברי הקבוצה)
2. m נקרא חסם מלרע של A אם $\forall a \in A : a \ge m$

דוגמה 4. ניקח לדוגמה את

$$A = \{1, 2, 3, -5, 463\}$$

1000 חסם מלעיל של A משום שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה.
גם 683 חסם מלעיל של A, מאותה סיבה.
463 הוא מקרה מיוחד של חסם מלעיל מיוחד, הוא המקסימום, דבר שנגדיר עוד מעט. מצד שני
-5.5 חסם מלרע של A משום שקטן או שווה לכל איברי הקבוצה.
-5 גם הוא חסם מלרע של A, אך הפעם זהו המינימום

דוגמה 5. לא לכל קבוצה יש חסם מלעיל או מלרע. לדוגמה ניקח את $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ ונראה ש-0 הוא חסם מלרע, איך אין לקבוצה חסם מלעיל!

הגדרה 7. תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אזי:
M הוא חסם עליון של A אם מתקיים:
א. M חסם מלעיל
ב. לכל חסם מלעיל T מתקיים $M \le T$
מסמנים אותו $\sup A$, מהמילה superior.

הערה 7. חסם מלעיל של A הוא חסם עליון אם אין חסם מלעיל קטן ממנו, בעצם חסם עליון הוא חסם המלעיל הכי קטן.

הגדרה 8. תהי קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$, אזי:
M הוא חסם עליון של A אם מתקיים:
א. M חסם מלרע
ב. לכל חסם מלרע T מתקיים $M \ge T$
מסמנים אותו $\sup A$, מהמילה inferior.

דוגמה 6. ניקח את

$$B=\left\{\left(\frac{1}{n}\right):n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}$$

נשים לב ש-1 חסם מלעיל של הקבוצה ואפילו החסם העליון שלה, משום שכל חסם מלעיל צריך להיות גדול או שווה לכל איברי הקבוצה, בפרט ל-1.
הקבוצה חסומה מלרע ע"י 0, וזה גם החסם התחתון, משום שאם היה חסם מלרע אחר, אפסילון, שלכל n היה מקיים $\varepsilon<\frac{1}{n}$ אז אפשר לראות שזה בלתי אפשרי ע"י לקחת $n>\frac{1}{\varepsilon}$ ולהגיע לסתירה.

הערה 8. לא תמיד קיים חסם עליון, לדוגמה אם הקבוצה לא חסומה מלעיל, בוודאי שאין חסם עליון.

משפט 2. *אם חסם עליון קיים אזי הוא יחיד*

הוכחה. אם M_1,M_2 חסם עליונים אז שניהם חסמים מלעיל. כיוון ש- M_1 חסם עליון ו- M_2 חסם מלעיל מתקיים ש- $M_1\leq M_2$, ובאופן סימטרי כיוון ש- M_2 חסם עליון ו- M_1 חסם מלעיל אז $M_2\leq M_1$. בסך הכך $M_1=M_2$ ואז ראינו שאם יש כמה חסמים עליונים, הם בעצם אותו אחד. $\square$

הערה 9. הטענה נכונה גם לחסם תחתון, עם הוכחה כמעט זהה (רק צריך להפוך את סימני אי השיוויונים)

הגדרה 9. חסם עליון של A נקרא מקסימום אם הוא שייך לקבוצה A (בעצם המקסימום זה איבר בקבוצה שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה)
חסם תחתון של A נקרא מינימום אם הוא שייך לקבוצה A

דוגמה 7. ניקח את $C=[a,b)$. נראה כי $\inf C=a,\sup C=b$, וביוון ש- $a\in C,b\notin C$ נקבל שיש לקבוצה מינימום אבל לא מקסימום.

דוגמה 8. ניקח את

$$D=\left\{\left(\frac{1}{10}\right)^n:n\in\mathbb{N}\right\}=\{0.1,0.01,0.001,\cdots\}$$

נשים לב ש-0.1 חסם מלעיל של הקבוצה, ומשום גם נמצא בתוך הקבוצה הוא מקסימום שלה ומכאן גם חסם עליון.
מה המינימום שלה? נראה שאין כזה ע"י כך שנמצא את החסם התחתון של D ונראה שהוא לא בקבוצה, למרות שמינימום הוא תמיד בקבוצה.
0 חסם תחתון של D משום שחסם מלרע וגם אם קיים חסם מלרע גדול יותר, ε אז מתקיים

$$\forall n:\varepsilon\leq\left(\frac{1}{10}\right)^n=\frac{1}{10^n}\Rightarrow$$

$$\forall n:10^n\leq\frac{1}{\varepsilon}$$

אבל החלק הימני קבוע והחלק השמאלי יכול להיות גדול כרצוננו (עבור בחירת n מספיק גדול) ולכן קיבלנו שמשהו שגדול כרצוננו קטן ממשהו קבוע וזוהי כמובן סתירה, ומכאן ש-0 הוא חסם המלרע הכי גדול.
מצד שני $0\notin D$, ולכן אין מינימום.

משפט 3. *אם M חסם מלעיל של A ו- $M \in A$ אזי הוא מקסימום*

הוכחה. צריך להוכיח ש-M חסם עליון. נניח שקיים חסם מלעיל אחר, T אזי $\forall a \in A:$ $a \leq T$ אבל $M \in A$ ולכן $M \leq T$. לכן הוא חסם עליון. □

שימו לב לשלילות הבאות:

1. M אינו חסם מלעיל אמ"ם קיים איבר $a \in A$ כך ש- $a > M$
2. m אינו חסם מלרע אמ"ם קיים איבר $a \in A$ כך ש- $a < M$
3. M אינו חסם עליון אמ"ם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:
   א. M אינו חסם מלעיל
   ב. קיים חסם מלעיל T כך ש- $T < M$.
4. m אינו חסם תחתון אמ"ם מתקיים אחד מהתנאים הבאים:
   א. m אינו חסם מלרע
   ב. קיים חסם מלרע t כך ש- $m < t$.

משפט 4. *תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל אזי:*
M חסם עליון של A אמ"ם M חסם מלעיל של A וגם לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $a > M - \epsilon$
m חסם תחתון של A אמ"ם m חסם מלרע של A וגם לכל $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $a < m + \epsilon$

במילים: M חסם עליון אם הוא חסם מלעיל וגם אין חסם מלעיל הקטן ממנו. כלומר, כל מספר הקטן ממנו אינו חסם מלעיל. כלומר, אם נקטין את M בגודל כלשהו שאינו אפס נקבל מספר שאינו חסם מלעיל. מספר אינו חסם מלעיל אמ"ם יש איבר בקבוצה הגדול ממנו. (ניסוח דומה עבור החסם התחתון.)

הוכחה. נוכיח עבור חסם עליון, ועבור חסם תחתון אפשר להוכיח באופן דומה.
$\boxed{\Leftarrow}$
נניח M חסם עליון. מתוך ההגדרה של חסם עליון נובע בפרט ש-M חסם מלעיל. נותר להוכיח כי

$$\forall \epsilon > 0 \exists a \in A : a > M - \epsilon$$

נניח בשלילה כי קיים $\epsilon > 0$ כל שלכל האיברים $a \in A$ מתקיים $a \leq M - \epsilon$.
לכן, לפי ההגדרה, $M - \epsilon$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה. מכיוון שאפסילון גדול מאפס, $M - \epsilon$ הוא חסם מלעיל קטן ממש מהחסם העליון M, בסתירה לכך שהוא חסם המלעיל הקטן ביותר.
$\boxed{\Rightarrow}$ נניח בשלילה ש- M לא חסם עליון. לפי הנתון הוא חסם מלעיל ולכן מההנחה בשלילה מסיקים שיש חסם מלעיל קטן ממנו, נסמנו m. נסתכל על $\varepsilon = M - m$, ונראה ש- $M - \varepsilon = m$, שגדול או שווה לכל איברי הקבוצה, ולכן אין איבר ב-A שגדול מ-$M - \varepsilon$, בסתירה לנתון. □

הערה 10. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ ונגדיר $B = \{-a : a \in A\}$. אזי
1. M חסם מלעיל של A אם ורק אם $-M$ חסם מלרע של B
2. M חסם עליון של A אם ורק אם $-M$ חסם תחתון של B.

הוכחה. 1. $-M$ חסם מלרע של B $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall b \in B : -M \leq b$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : -M \leq -a$
$\Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq M$
M חסם מלעיל של A

2. נניח M חסם עליון של A, בפרט הוא חסם מלעיל ולכן $-M$ חסם מלרע של B. בעת נניח בשלילה שקיים חסם מלרע $m \geq -M$, ולכן $-m \leq M$ חסם מלעיל של A בסתירה לכך ש- M חסם המלעיל הכי קטן שלו, ולכן אין חסם מלרע גדול מ- $-M$ ואז הוא חסם תחתון. את הכיוון השני מוכיחים באופן דומה.

$\square$

הערה 11 (אקסיומת החסם העליון). מאחת ההגדרות של $\mathbb{R}$ מקבלים שלכל $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל קיים חסם עליון.

משפט 5. *אם* $\phi \neq A \subseteq \mathbb{R}$ *חסומה מלרע אזי קיים חסם תחתון.*

הוכחה. תהי A לא ריקה חסומה מלרע. אם נגדיר את B כמו במשפט האחרון נקבל שהיא חסומה מלעיל לפי המשפט, ומההערה יש לה חסם עליון M. מאותו המשפט, נקבל ש- $-M$ חסם תחתון של A ולכן הוכחנו שיש לה חסם תחתון. (מצאנו אותו) $\square$

הערה 12. בהנתן 2 קבוצות לא ריקות A, B נגדיר את $A+B$ באופן הבא:

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}$$

אם שתיהן חסומות מלעיל אזי גם $A+B$ חסומה מלעיל ומתקיים ש- $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

הוכחה. קודם כל נראה ש- $\sup A + \sup B$ הוא חסם מלעיל של $A+B$: יהי $x \in A+B$ אזי קיימים $a \in A, b \in B$ כך ש- $x = a + b$.
בעת נראה ש- $x = a + b \leq \sup A + \sup B$ משום ש- $a \leq \sup A, b \leq \sup B$.
בעת נראה שזהו חסם עליון: יהי $\varepsilon > 0$. ידוע אז ש-

$$\exists a' \in A, b' \in B : \sup A - \frac{\varepsilon}{2} < a', \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < b'$$

ולכן

$$\sup A + \sup B - \varepsilon = \sup A - \frac{\varepsilon}{2} + \sup B - \frac{\varepsilon}{2} < a' + b' \in A + B$$

הוכחנו שלכל אפסילון קיים איבר ב- $A+B$ שגדול מ- $\sup A + \sup B - \varepsilon$ ולכן $\sup A + \sup B$ הוא החסם העליון של $A+B$ $\square$

2.2 סדרות

3.2 הגדרת סדרה

הגדרה 10. סדרה היא פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, כלומר התאמה בין המספרים הטבעיים למספרים הממשיים. לכל מספר טבעי מתאימים מספר ממשי. דוגמה לכך תהיה פונקציה

שמתאימה את 1 ל-1, את 2 ל-$\frac{1}{2}$, את 3 ל- $\frac{1}{3}$ ובאופן כללי את n ל- $\frac{1}{n}$ (נהוג לסמן a_n במקום $f(n)$ בהקשר של סדרות ולכן פה $a_n = \frac{1}{n}$). כשאנחנו מתאימים את המספר הטבעי n למספר ממשי a_n, זה אומר אינטואיטיבית ש- a_n זה האיבר במקום ה- n. כך לדוגמה את הפונקציה שהתאימה את n ל- $\frac{1}{n}$ ניתן לראות בעצם כמה שאנחנו מכירים כסדרה:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$

סימון מקובל לסדרות הוא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. גם סדרת מספרים אקראית היא סדרה, לא חייבת להיות חוקיות ברורה!

4.2 הגדרת הגבול

מתי נאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ "שואפת" (או "מתכנסת") למספר L?
באופן אינטואיטיבי הכוונה ברורה, הסדרה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$ בבירור שואפת ל-0, הסדרה $0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \cdots$ לא מתכנסת לכלום והסדרה $100, 1000, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$ עדיין שואפת ל-0 למרות שבהתחלה היא דווקא התרחקה ממנו קצת. אבל עדיין, איך ממש מגדירים את זה מתמטית?

הגדרה 11. שנאמר שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ "שואפת" (או "מתכנסת") למספר L ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ או $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ אם

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \forall n > N_\varepsilon : |a_n - L| < \varepsilon$$

נכון שזה נראה מאוד מפחיד במבט ראשון, אך בעצם זה גם דבר הגיוני. "בלשון בני אדם", ההגדרה אומרת שלכל מרחק שיתנו לי מהגבול, לא חשוב כמה קטן (זהו האפסילון), אני יכול למצוא מקום בסדרה (זה ה- N_ϵ, מקום בסדרה שתלוי במרחק הקטן אפסילון שנתנו לי), שכל האיברים אחרי המקום ההוא (לכל המקומות n ש- $n > N_\epsilon$) מקיימים שהמרחק שלהם מהגבול ($|a_n - L|$ זה המרחק בין האיבר a_n לגבול L) קטן מאפסילון, המרחק ההתחלתי הקטן.

דוגמה 9. במקרה של $a_n = \frac{1}{n}$, נרצה להוכיח שזה שואף ל-0. כלומר לכל מרחק מ-0, לא חשוב כמה קטן (אפסילון), אמצא מקום בסדרה שכל האיברים אחריו מקיימים ש- $|a_n - 0| < \epsilon$ (המרחק בין האיבר לגבול, 0, קטן מאפסילון). לדוגמה, אם מישהו יתן לי את המרחק $\varepsilon = 0.0001$, אם נסתכל על האיבר במקום ה- $N = 10000$, המרחק בין האיברים שבאים אחריו לבין 0 יהיה קטן מ- 0.0001 (אפסילון). איך נוכיח אז שזה עובד לכל אפסילון?

יהי אפסילון גדול מ-0 (מישהו נתן לי מרחק ממש קטן, אולי $\varepsilon = 0.0000001$ או אולי $\epsilon = 10^{-10000}$ או אולי אפילו קטן יותר).
אנחנו צריכים למצוא N שלכל $n > N$ יתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$, אבל זה בדיוק אומר ש- $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$, וזה קורה אם $n > \frac{1}{\epsilon}$ (העברת אגפים פשוטה). לכן אם ניקח N שגדול מאחד חלקי אפסילון, יתקיים שלכל האיברים אחריו, המרחק ביניהם ל-0 קטן מאפסילון. בדיוק מה שהיינו צריכים להוכיח!

5.2 גבולות אינסופיים

ראינו מה קורה לגבי סדרות ששואפות למספר, אבל לפעמים נוח להגיד שסדרה "שואפת לאינסוף", כמו במקרה של $1, 2, 3, 4, \cdots$. מתי נגיד שזה מתקיים? אם הסדרה מצליחה

בסופו של דבר לעקוף כל מספר, לא חשוב כמה הוא גדול. במובנים מתמטיים, זה אומר שלכל M (מספר גדול) קיים מקום בסדרה N שכל האיברים אחריו (לכל $n > N$), הסדרה תהיה גדולה יותר מהמספר הגדול M . בשפת כמתים:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \in \mathbb{N} : a_n > M$$

באותו אופן, אפשר להגדיר שאיפה למינוס אינסוף:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \exists N \in \mathbb{N} : a_n < M$$