1 פונקציונלים לינאריים

הגדרה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל השדה $\mathbb{F}$. נתבונן ב-$\mathbb{F}$ בתור מרחב וקטורי מעל עצמו ($\dim_{\mathbb{F}}\mathbb{F}=1$, $\{1\}$ בסיס). אומרים שהעתקה לינארית $\varphi:V\to\mathbb{F}$ היא **פונקציונל לינארי על** V.

דוגמה 1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$, ויהי $a\in V$. נגדיר $\varphi_a:V\to\mathbb{F}$ כך:

$$\varphi_a\left(x\right)=\left\langle x,a\right\rangle$$

φ_a הוא פונקציונל לינארי, מפני שמתקיים:

$$\varphi_a\left(\alpha x_1+\beta x_2\right)=\left\langle \alpha x_1+\beta x_2,a\right\rangle=\alpha\left\langle x_1,a\right\rangle+\beta\left\langle x_2,a\right\rangle=\alpha\varphi_a\left(x_1\right)+\beta\varphi_a\left(x_2\right)$$

משפט 1. *משפט ההצגה של ריס*
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ממימד סופי, ויהי $\varphi:V\to\mathbb{F}$ פונקציונל לינארי. אזי קיים וקטור $a\in V$ אחד ויחיד (התלוי ב-φ), שעבורו לכל $x\in V$,

$$\varphi\left(x\right)=\left\langle x,a\right\rangle$$

הוכחה. **קיום** נבחר ב-$\mathbb{F}$ את הבסיס $\{1\}$. נבחר במרחב V בסיס אורתונורמלי B. נבנה מטריצה מייצגת של φ יחסית לבסיסים B, $\{1\}$. זו מטריצה מגודל $1\times n$, ז"א שורה, נסמן אותה b.

יהי $x\in V$. אזי $\varphi\left(x\right)=b\left[x\right]_B=\left(b\left[x\right]_B\right)^t=\left[x\right]_B^t b^t$ (מותר לשחלף כי מדובר במטריצה 1×1, כלומר סקלר).

מצד שני, ידוע שמתקיים $\left\langle x,a\right\rangle=\left[x\right]_B^t G_B\overline{\left[a\right]_B}=\left[x\right]_B^t\overline{\left[a\right]_B}$ (ידוע $G_B=I$, כי B אורתונורמלי).

לכן, אם נבחר a המקיים $\left[a\right]_B=\overline{b}^t=b^*$, נקבל הדרוש.

יחידות אם יש a,a' כך שלכל $x\in V$ מתקיים $\varphi\left(x\right)=\left\langle x,a\right\rangle=\left\langle x,a'\right\rangle$, אזי לכל x מתקיים $\left\langle x,a-a'\right\rangle=0$. ניקח $x=a-a'$, ונקבל $\left\langle a-a',a-a'\right\rangle=0$, ולפי האי-שליליות $a-a'=0$, כלומר $a=a'$.

□

נעזוב בעת את נושא הפונקציונלים; נחזור אליו בהרצאה האחרונה.

2 ההעתקה הצמודה

הגדרה 2. יהיו V,W מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T:V\to W$ העתקה לינארית. אומרים כי $T^*:W\to V$ היא **ההעתקה הצמודה ל-**T, אם לכל וקטורים $v\in V$ ו-$w\in W$ מתקיים

$$\left\langle T\left(v\right),w\right\rangle=\left\langle v,T^*\left(w\right)\right\rangle$$

הערה 1. נקבע $w\in W$, ונגדיר $\varphi_w:V\to\mathbb{F}$ על ידי $\varphi_w\left(v\right)=\left\langle T\left(v\right),w\right\rangle$. φ_w הוא פונקציונל לינארי, ולכן, לפי משפט ההצגה של ריס, קיים וקטור $a\in V$, אחד ויחיד (התלוי ב-T וב-w) כך שמתקיים $\varphi_w\left(v\right)=\left\langle v,a\right\rangle$. ז"א שלכל $w\in W$ התאמנו $a\in V$ (באופן חד-משמעי). כלומר, בנינו העתקה מ-W ל-V שנסמן אותה $T^*:W\to V$, $w\mapsto a$.

מה בעצם עשינו? בנינו "בידיים" את ההעתקה; לכל וקטור בחרנו וקטור ספציפי שאליו הוא יועתק. הבנייה הזו מראה את הקיום ואת היחידות של ההעתקה הצמודה; אם יש שתיים באלו הנבדלות בערכן בווקטור מסוים, משפט ההצגה של ריס ייתן סתירה. כמו כן, הצבענו בבירור על העתקה כזו, כלומר היא אכן קיימת. נותר להוכיח דבר אחד - ההעתקה הצמודה היא באמת העתקה לינארית.

משפט 2. *$T^* : W \to V$ היא העתקה לינארית.*

הוכחה. צריך להוכיח $T^*\left(\alpha w_1 + \beta w_2\right) = \alpha T^*\left(w_1\right) + \beta T^*\left(w_2\right)$. ניקח $v \in V$ וקטור כלשהו. נשים לב כי:

$$\left\langle v, T^*\left(\alpha w_1 + \beta w_2\right)\right\rangle = \left\langle T\left(v\right), \alpha w_1 + \beta w_2\right\rangle = \overline{\alpha}\left\langle T\left(v\right), w_1\right\rangle + \overline{\beta}\left\langle T\left(v\right), w_2\right\rangle =$$

$$= \overline{\alpha}\left\langle v, T^*\left(w_1\right)\right\rangle + \overline{\beta}\left\langle v, T^*\left(w_2\right)\right\rangle = \left\langle v, \alpha T^*\left(w_1\right) + \beta T^*\left(w_2\right)\right\rangle$$

לכן לכל $v \in V$ מתקיים $\left\langle v, T^*\left(\alpha w_1 + \beta w_2\right) - \alpha T^*\left(w_1\right) + \beta T^*\left(w_2\right)\right\rangle = 0$.
ניקח $v = T^*\left(\alpha w_1 + \beta w_2\right) - \alpha T^*\left(w_1\right) + \beta T^*\left(w_2\right)$, ומהאי-שליליות של מכפלה פנימית נקבל את הדרוש.

□

הגדרנו את ההעתקה הצמודה, והוכחנו שהיא קיימת ויחידה. בעת, נשאל - מה עם המטריצה המייצגת שלה? בעת, נקבל גם הבהרה לסימון T^*:

משפט 3. *תהי $T^* : W \to V$ ההעתקה הצמודה ל-$T : V \to W$. יהי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס אורתונורמלי של V, יהי $B' = \{w_1, \ldots, w_m\}$ בסיס אורתונורמלי של W, ותהי A המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B, B'. תהי A' המטריצה המייצגת של T^* יחסית ל-B, B'. אזי $A' = A^* = \overline{A}^t$.*

הוכחה. נחשב את שני הצדדים של השוויון $\left\langle T\left(v\right), w\right\rangle = \left\langle v, T^*\left(w\right)\right\rangle$ עבור $v = v_i$, $i = 1, \ldots, n$ ועבור $w = w_j$, $j = 1, \ldots, m$.

$$\left\langle T\left(v_i\right), w_j\right\rangle = \left[T\left(v_i\right)\right]_{B'}^t \overline{\left[w_j\right]_{B'}} = \left(A\left[v_i\right]_B\right)^t A^t \overline{\left[w_j\right]_{B'}} = e_i^t A^t e_j = a_{ji}$$

$$\left\langle v_i, T^*\left(w_j\right)\right\rangle = \left[v_i\right]_B^t \overline{\left[T^*\left(w_j\right)\right]_B} = \left[v_i\right]_B^t \overline{A'\left[w_j\right]_{B'}} = e_i^t \overline{A'} e_j = \overline{a'_{ij}}$$

לפי השוויון $\left\langle T\left(v\right), w\right\rangle = \left\langle v, T^*\left(w\right)\right\rangle$, נקבל $\overline{a'_{ij}} = a_{ji}$, כלומר $a'_{ij} = \overline{a_{ji}}$. בסך הכל, $A' = A^* = \overline{A}^t$.

□

מהמשפט הנ"ל, נוכל להיעזר בידע שלנו על מטריצות ולחשב העתקות צמודות של סכום, כפל בסקלר, הכפלה וכו'. ניתן לחשב זאת גם ישירות, אך נוח יותר להיעזר במטריצות.
יהיו $T, T' : V \to W$ ו-$S : W \to U$ העתקות לינאריות. אזי:

1. הרכבה: $\left(S \circ T\right)^* = T^* \circ S^*$.
2. העתקה צמודה של העתקה צמודה: $\left(T^*\right)^* = T$.
3. חיבור וכפל בסקלר:

(א) חיבור: $(T+T')^*=T^*+(T')^*$.

(ב) כפל בסקלר: $(\alpha T)^*=\overline{\alpha}T^*$.

הוכחה. נבחר בסיסים אורתונורמליים בכל המרחבים ונשתמש במטריצות המייצגות של ההעתקות יחסית לבסיסים האלו. נשתמש במשפט הקודם.

1. תהיינה A,A' המטריצות המייצגות של T,S בהתאמה; $(AA')^*=(A')^*A^*$.
2. $(A^*)^*=A$.
3. (א) $(A+A')^*=A^*+(A')^*$.

   (ב) כפל בסקלר: $(\alpha A)^*=\overline{(\alpha A)}^t=\overline{\alpha}\overline{A}^t=\overline{\alpha}A^*$.

□