1 פירוק ניצב

משפט 1. *משפט הפירוק הניצב*
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{F}$ ממימד n. אזי לכל תת-מרחב $U \subseteq V$ מתקיים:

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

הוכחה. נבחר ב-U בסיס אורתונורמלי $\{v_1, \ldots, v_k\}$, ונשלים אותו עד בסיס אורתונורמלי $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ של V. נתבונן ב-$\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$, ונוכיח שזה בסיס של $U^{\perp}$.
יהי $w \in \text{Span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. $v_{k+1}, \ldots, v_n \in U^{\perp}$, ולכן $w \in U^{\perp}$.
בכיוון ההפוך, יהי $w \in U^{\perp}$. נרשום $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n$, ונכפול (במובן מכפלה פנימית) עם v_i עבור $i = 1, \ldots, k$.
אם כן, לכל $i = 1, \ldots, k$, מתקיים $\alpha_i = \langle w, v_i \rangle = 0$, ולכן $w \in \text{Span}\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.
מכאן נובע ש-$V = U + U^{\perp}$. נותר להוכיח $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. יהי $w \in U$, $w \in U^{\perp}$. אזי $\langle w, w \rangle = 0$, ולכן $w = 0$.
בסך הכל, $V = U \oplus U^{\perp}$.

□

הערה 1. אם $\dim U = k$, $\dim V = n$, אזי $\dim U^{\perp} = n - k$.

הערה 2.
$$\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$$

הוכחה. נוכיח בשתי דרכים:

1. $V = \left(U^{\perp}\right)^{\perp} \oplus U^{\perp}$, וכן $V = U \oplus U^{\perp}$, ומכאן $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$, מיחידות המשלים האורתוגונלי.
2. על פי ההגדרה, $U \subseteq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$: ניקח $v \in U$, ולכן לכל $w \in U^{\perp}$ מתקיים $\langle w, v \rangle = 0$, ולכן $v \in \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$.

   כמו כן $\dim \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = n - (n-k) = k$, ולכן הם שווים.

□

כאשר הגדרנו הטלת וקטור על תת-מרחב, ההגדרה הייתה תלויה בבסיס. בעת, לאחר שהוכחנו את משפט הפירוק הניצב, נוכל להוכיח שאין תלות בבסיס.

הערה 3. תהי $\pi_B : V \to U$ העתקה ההטלה על תת-המרחב U, כאשר B בסיס אורתוגונלי של U. נתבונן בבסיס אורתוגונלי אחר, B', של U, ובהעתקת ההטלה המתאימה $\pi_{B'}$.
יהי $v \in V$. אזי הן $\pi_B(v)$ והן $\pi_{B'}(v)$ שייכים ל-U.
לפי הערה שהוכחנו, $v - \pi_B(v), v - \pi_{B'}(v) \in U^{\perp}$. מתקיים:

$$v = \underbrace{\pi_B(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - \pi_B(v))}_{\in U^{\perp}}$$

$$v = \underbrace{\pi_{B'}(v)}_{\in U} + \underbrace{(v - \pi_{B'}(v))}_{\in U^{\perp}}$$

לכן, ממשפט הפירוק הניצב, נקבל $\pi_B(v) = \pi_{B'}(v)$.

ההיטל $\pi_B(v)$ של וקטור v על תת-המרחב U אינו תלוי בבחירה של הבסיס האורתוגונלי B של U.

הערה 4. אם $u \perp v$, אזי $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

הוכחה.

$$\|u \pm v\|^2 = \langle u \pm v, u \pm v\rangle = \langle u, u\rangle \pm \underbrace{\langle u, v\rangle}_{=0} \pm \underbrace{\langle v, u\rangle}_{=0} + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

□

1.1 המשמעות הגיאומטרית של היטל

הערה 5. ההיטל של וקטור v על תת-מרחב U הא הווקטור ב-U הקרוב ביותר לווקטור v (מבחינת המרחק המושרה - $\rho(x,y) = \|x - y\|$).

ז"א, אם $v \in V$, $U \subseteq V$ ו-$\pi : V \to U$ ההטלה, אזי לכל $u \in U$ מתקיים $\rho(v, \pi(v)) \leq \rho(v, u)$.

הוכחה.

$$\|v - \pi(v)\|^2 \leq \|v - \pi(v)\|^2 + \|\pi(v) - u\|^2 = \|(v - \pi(v)) + (\pi(v) - u)\|^2 = \|v - u\|^2$$

ולכן $\rho(v, \pi(v)) \leq \rho(v, u)$.

□

2 יחידות של מכפלה פנימית

נרצה להוכיח בעת שאם יש לנו שני מרחבים וקטוריים עם מכפלה פנימית מאותו מימד, הם בעצם "אותו דבר" (רק משנים את הסמלים של האיברים). בזכור, כדי לומר ששני מרחבים וקטוריים הם "אותו דבר", חיפשנו העתקה לינארית חח"ע ועל ביניהם, הנקראת גם **איזומורפיזם**. בלינארית 1 הוכחנו ששני מרחבים וקטוריים איזומורפיים אם ורק אם יש להם אותו מימד. בעת ננסה לראות האם עובדה זו נכונה גם אם יש עליהם מכפלה פנימית.

הגדרה 1. יהיו V, V' מרחבי מכפלה פנימית. אומרים ש-V **איזומורפי** ל-V' (ומסמנים $V \cong V'$), אם קיים איזומורפיזם $f : V \to V'$ של מרחבים וקטוריים, כך שלכל $u, v \in V$ מתקיים $\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$.

משפט 2. *אם $\dim V = \dim V'$, אזי V איזומורפי ל-V' (במובן של איזומורפיזם של מרחבי מכפלה פנימית).*

הוכחה. נבחר בסיס אורתונורמלי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ של V ובסיס אורתונורמלי $B' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$ של V'. לכל $i = 1, \ldots, n$ נגדיר $f(v_i) = v'_i$, ונרחיב את f לפי לינאריות, כלומר נגדיר

$$f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 v'_1 + \cdots + \alpha_n v'_n$$

f העתקה לינארית, לפי ההגדרה.

$\operatorname{im} f = V'$ (כי לכל $i = 1, \ldots, n$, מתקיים $v_i \in \operatorname{im} f$), ולכן לפי משפט המימדים $\ker f = \{0\}$, כלומר f היא איזומורפיזם.

אם $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, ואם $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$. לפי האורתונורמליות, מתקיים

$$\langle \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \cdots + \alpha_n \overline{\beta_n} = \langle u, v \rangle$$

ולכן $V \cong V'$.

$\square$

3 המשמעות הגיאומטרית של דטרמיננטה

נחזור לתהליך גראם-שמידט, $v_i' = v_i - \pi(v_i)$, כאשר π היא העתקה ההטלה על תת-המרחב הנפרש על ידי $\left\{ v_1', \ldots, v_{i-1}' \right\}$.

נסמן ב-C את מטריצת המעבר מ-$\{v_1, \ldots, v_n\}$ ל-

$$\{v_1', \ldots, v_n'\}$$

. לכן $\begin{pmatrix} 1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = C$–"C.,

המעבר הבא - נרמול הבסיס $\{v_1', \ldots, v_n'\}$ - מתואר על ידי המטריצה האלכסונית

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|v_1'\|} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\|v_n'\|} \end{pmatrix}$$

לכן, מעבר מבסיס $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ לבסיס אורתונורמלי מתואר על ידי המטריצה DC. תהי G_B מטריצת הגראם של הבסיס B, אזי, לפי משפט שהוכחנו:

$$I = (DC)^t \, G_B \overline{(DC)} = C^t D^t G_B \overline{D}\,\overline{C}$$

נפעיל דטרמיננטה, ונקבל:

$$\det I = \det\left(C^t D^t G_B \overline{D}\,\overline{C} \right)$$

$$1 = 1 \cdot \frac{1}{\|v_1'\| \cdots \|v_n'\|} \cdot \det G_B \cdot \frac{1}{\|v_1'\| \cdots \|v_n'\|} \cdot 1$$

$$\det G_B = \|v_1'\|^2 \cdots \|v_n'\|^2$$

$$\det G_B \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

הגדרה 2. יהי $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, נניח $\dim V = n$, ותהי $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצת וקטורים. נגדיר **מקבילון** P על ידי

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \,\middle|\, 0 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

הגדרה 3. נניח ש-$B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V, ונגדיר את **נפח המקבילון הנוצר על ידם** להיות
$$\mathsf{vol}\left(P\right)=\sqrt{\mathsf{det}\,G_B}$$

משפט 3. *אם $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V, נסמן P המקבילון הנוצר על ידי $\{v_1,\ldots,v_n\}$, S המקבילון הנוצר על ידי $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$, ו-$h=v_n-\pi_{\mathsf{Span}\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}}\left(v_n\right)$. אזי*

$$\mathsf{vol}\left(P\right)=\mathsf{vol}\left(S\right)\cdot\|h\|$$

הוכחה. נסמן ב-A את מטריצת המעבר מהבסיס $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ לבסיס $B'=\{v_1,\ldots,v_{n-1},h\}$. אזי A היא מהצורה
$$A=\begin{pmatrix}1 & & 0 & \star\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & \star\\ & & & 1\end{pmatrix}$$
מטריצת גראם יחסית לבסיס B' היא
$$G_{B'}=\begin{pmatrix}M_{nn}\left(G_B\right) & 0\\ 0 & \|h\|^2\end{pmatrix}$$
כאשר $M_nn\left(G_B\right)$ מסמן את המינור ה-n,n מ-G_B, כלומר G_B בלי השורה ה-n-ית ובלי העמודה ה-n-ית (הצורה ככה כי h מאונך לשאר הווקטורים). אם כן,
$$\mathsf{vol}\left(P\right)=\sqrt{\mathsf{det}\,G_B}=\sqrt{\mathsf{det}\left(\overline{A}G_{B'}A^t\right)}=\sqrt{\mathsf{det}\,\overline{A}\,\mathsf{det}\,G_{B'}\,\mathsf{det}\,A^t}=\sqrt{\mathsf{det}\,G_{B'}}=$$
$$=\sqrt{\mathsf{det}\,M_{nn}\left(G_B\right)\|h\|^2}=\sqrt{\mathsf{det}\,M_{nn}\left(G_B\right)}\,\|h\|=\mathsf{vol}\left(S\right)\|h\|$$
□

משפט 4. *אם $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ בסיס של V, ואם $E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ בסיס אורתונורמלי, נסמן ב-E את מטריצת המעבר ביניהם. אזי*

$$\mathsf{vol}\left(P_B\right)=|\mathsf{det}\,A|$$

הוכחה.
$$\mathsf{vol}\left(P\right)=\sqrt{\mathsf{det}\,G_B}=\sqrt{\mathsf{det}\left(\overline{A}G_EA^t\right)}=\sqrt{\mathsf{det}\,\overline{A}\,\mathsf{det}\,I\,\mathsf{det}\,A^t}=$$
$$=\sqrt{\overline{\mathsf{det}\,A}\,\mathsf{det}\,A}=\sqrt{|\mathsf{det}\,A|^2}=|\mathsf{det}\,A|$$
□