1 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצות

הגדרה 1. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אומרים ש-$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא **ערך עצמי (ע"ע)** של A, אם קיים וקטור $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ שעבורו $Av = \lambda v$.
הוקטור v נקרא **וקטור עצמי (ו"ע)** של A הקשור ל-λ.

הגדרה 2. אוסף כל הערכים העצמיים של A נקרא **הספקטרום** של A, ומסומן $\text{spec}(A)$.

הערה 1. יכול להיות המצב $spec(A) = \emptyset$.

הרעיון בערכים עצמיים ווקטורים עצמיים הוא לדעת אילו וקטורים המטריצה מותחת או מכווצת. הווקטור העצמי – מי ההעתקה מותחת או מכווצת, והערך העצמי – פי כמה. בהמשך נראה שלערכים העצמיים ולווקטורים העצמיים יש תפקיד משמעותי ב"הבנת" מטריצות.

משפט 1. *$\lambda = 0$ ערך עצמי של A אם ורק אם A איננה הפיכה.*

הוכחה. $\boxed{\Leftarrow}$ נניח $\lambda = 0$ הוא ע"ע של A. זאת אומרת שקיים וקטור $0 \neq v$ שעבורו $Av = 0$. נסמן

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

נוכל להגיד שלפיכך

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + \cdots + a_{nn}v_n = 0 \end{cases}$$

היא מערכת הומוגנית (בת n משוואות מ-n נעלמים). למערכת יש פתרון לא טריוויאלי, ולכן A אינה הפיכה.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח ש-A הפיכה. נתבונן במערכת $Av = 0$. יש לה פתרון לא טריוויאלי $v \neq 0$, ולכן מתקיים $Av = 0 = 0 \cdot v$, זאת אומרת ש-$\lambda = 0$ הוא ע"ע של A.

□

הערה 2. A איננה הפיכה אם ורק אם $\det(A) = 0$.

משפט 2. *$\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ אם ורק אם* $\det(\lambda I - A) = 0$.

הוכחה. $\lambda \in \mathbb{F}$ הוא ע"ע של A $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$Av = \lambda v$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$\lambda v - Av = 0$ $\Leftrightarrow$ קיים $v \neq 0$ כך ש-$(\lambda I - A)v = 0$ $\Leftrightarrow$ המטריצה $\lambda I - A$ אינה הפיכה $\Leftrightarrow$ $\det(\lambda I - A) = 0$.

□

המשפט מאפשר לנו לחשב ערכים עצמיים מבלי לנסות לכפול וקטורים במטריצה בתקווה ש"ייצא טוב". לפי המשפט, כדי למצוא ערכים עצמיים של המטריצה נוכל לפתור את המשוואה $\det(\lambda I - A) = 0$. זהו פולינום ממעלה n, ובהמשך נקרא לו "הפולינום האופייני" של A, והוא ישחק תפקיד חשוב בתיאוריה שלנו.
נציג כעת מספר דוגמאות למציאת ערכים עצמיים.

דוגמה 1 (מטריצת היחידה). ניקח $A = I_n$, ונחפש את $\text{spec}(A)$. נבדוק בשתי שיטות:

שיטה ראשונה – חישוב ישיר נניח ש-$I_n v = \lambda v$. מכאן, $v = \lambda v$, כלומר $\lambda = 1$, כלומר $\text{spec}\left(I_n\right) = \{1\}$.

שיטה שנייה – לפי המשפט נשים לב כי

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

לכן, $\det\left(\lambda I - A\right) = \left(\lambda - 1\right)^n$ אם כן, $\left(\lambda - 1\right)^n = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, ולכן $\text{spec}\left(I_n\right) = \{1\}$.

לסיכום, הערך העצמי של מטריצת היחידה הוא 1, ומהחישוב שבחלק הראשון גילינו שכל הווקטורים הם וקטורים עצמיים שלו. זה אכן מתאים לדברים המוכרים – כל וקטור הכופלים במטריצת היחידה נשאר עצמו, המתיחה היא תמיד פי 1.

דוגמה 2 (מטריצה אלכסונית כללית). נסמן

$$A = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

נרצה לדעת מהו $\text{spec}\left(D\right)$. על פי המשפט, נסתכל על $\lambda I - D$:

$$\lambda I - D = \begin{pmatrix} \lambda - \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - \alpha_n \end{pmatrix}$$

הדטרמיננטה: $\det\left(\lambda I - A\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - \alpha_i\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

קיבלנו ש-$\text{spec}\left(D\right) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

אבן, גם את התוצאה הזו יכולנו לצפות מראש! מטריצה אלכסונית מותחת בדיוק את וקטורי היחידה, $e_1, \ldots, e_n$ פי $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ בהתאמה.

דוגמה 3 (מטריצה משולשת עליונה). ניקח

$$A = T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

מטריצה משולשת עליונה.

על פי הוכחה דומה לזו של מטריצה אלכסונית – מקבלים $\text{spec}\left(T\right) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$.

דוגמה 4. ניקח מעל $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ את המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

אזי

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

לפי חישוב, $\det\left(\lambda I - A\right) = \lambda^2 + 1 = 0$, אבל למשוואה זו אין פתרונות ב-$\mathbb{R}$.

אם כן, $\text{spec}\left(A\right) = \emptyset$.

2 ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של אופרטורים

הגדרה 3. **אופרטור לינארי** $T:V\to V$ הוא העתקה לינארית מ-V לעצמו.

המשמעות זהה למטריצות - אילו וקטורים האופרטור מותח או מכווץ.

1.2 הגדרת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים והקשר למטריצות המייצגות

הגדרה 4. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי. אומרים ש-$\lambda\in\mathbb{F}$ הוא **ערך עצמי** (ע"ע) של האופרטור T אם קיים $0\neq v\in V$ שעבורו $Tv=T(v)=\lambda v$. הוקטור v נקרא **וקטור עצמי** (ו"ע) של T הקשור ל-λ.

משפט 3. *יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי, יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V ותהי A המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B. אזי אם $\lambda\in\mathbb{F}$ הוא ערך עצמי של T, הוא גם ערך עצמי של A.*

הוכחה. נסמן

$$[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

A היא המטריצה המייצגת של T יחסית ל-B, ולכן $Tv=A\cdot[v]_B$. λ ע"ע של T, אזי קיים $v\neq 0$ כך ש-$Tv=\lambda v$, זאת אומרת $A\cdot[v]_B=\lambda[v]_B$, ולכן λ ע"ע של A.

$\square$

2.2 אלגוריתם למציאת ערכים עצמיים של אופרטור

1. נבחר בסיס B של V.
2. נחשב את המטריצה המייצגת A.
3. נרכיב את המשוואה $\det(\lambda I-A)=0$. זוהי משוואה ממעלה n.
4. מחפשים פתרונות $\lambda_1,\dots,\lambda_s$.